

**MODELO CENTRO-PERIFERIA EM TEMPO DISCRETO:  
PADRÕES DE AGLOMERAÇÃO ENTRE TRÊS REGIÕES**

por

Daniela Correia Rodrigues

Dissertação de Mestrado em Economia

Orientada por

Sofia Balbina Santos Dias de Castro Gothen

2016

## Nota Biográfica

Daniela Correia Rodrigues nasceu a 3 de Março de 1993, em Santa Maria da Feira, onde reside e completou toda a sua escolaridade básica e secundária.

Candidatou-se à licenciatura em Economia na Faculdade de Economia da Universidade do Porto (FEP) no ano letivo de 2011/2012, com uma média de dezanove (19) valores em vinte (20). Iniciou o curso em Setembro de 2011 e concluiu-o em Junho de 2014, com uma média final de dezoito (18) valores.

Imediatamente após a conclusão da licenciatura, ingressou no Mestrado em Economia na mesma faculdade. Completou a parte curricular em Janeiro de 2016, com uma média de dezoito (18) valores. Deu então início à redação da presente dissertação.

Durante o período em que frequentou o Mestrado em Economia, deu explicações a alunos do ensino básico e secundário, mormente nas áreas de Economia e Matemática.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os que, de uma forma ou de outra, contribuíram para que esta dissertação constitua, agora, uma realidade.

Dirijo-me, em especial, à minha orientadora, a Professora Doutora Sofia Dias de Castro, para expressar uma imensa gratidão pelo contínuo acompanhamento e disponibilidade prestados em todas as fases deste processo. Com início na definição do tema e ulterior desenvolvimento e revisão, saliento, entre muitos outros contributos, a pertinência das suas sugestões, que valorizaram grandemente o resultado final.

Agradeço à minha companheira da unidade curricular de Métodos Numéricos, Selma Pinto, pela constante troca de ideias, aprendizagem e superação num domínio que se assumiu fulcral na elaboração deste trabalho.

À minha maior e melhor amiga, Jéssica Sousa, por todas as palavras de encorajamento, compreensão e sinceridade manifestadas. Acima de tudo, agradeço-lhe pelos momentos de verdadeira amizade e cumplicidade partilhados desde sempre.

Por fim, aos meus pais, por não medirem esforços no auxílio da prossecução dos meus objetivos. Por toda a confiança e esperança que sempre fizeram questão de transparecer sentir, por serem o melhor exemplo de verdadeira coragem, humildade e amor incondicional, enfim, por fazerem de mim o que hoje sou, estar-lhes-ei eternamente grata. A eles dedico, com um profundo carinho e admiração, esta dissertação.

## Resumo

Esta dissertação objetiva prestar um esclarecimento acerca do modo como o enquadramento temporal afeta as dinâmicas de migração num modelo centro-periferia com três regiões. O comportamento caótico das soluções, desenquadrado da realidade empírica, observado em tempo discreto motiva a construção de uma dinâmica alternativa à de Commendatore *et al.* (2015b) que reproduza os resultados económicos registados num quadro temporal contínuo, onde o caos está ausente. Para a dita confrontação dos resultados serve a publicação de Gaspar *et al.* (2013). Após uma detalhada descrição do modelo de base, avança-se para a elaboração da nova função de migração, cumpridora dos pressupostos devidos. Para tal, procede-se à adaptação do trabalho de Garrido-da-Silva *et al.* (2015) por forma a contemplar uma região adicional, seguindo-se o estudo analítico, complementado por simulação numérica em MATLAB/Octave, dos pontos de equilíbrio e condições de estabilidade. Infere-se a desejada confluência das conclusões obtidas em tempo discreto com as formuladas em tempo contínuo, interpretando-se economicamente os visíveis padrões de distribuição da atividade económica entre as três regiões. Rejeita-se, por fim, a hipótese de que a ocorrência de caos determinístico é uma característica intrínseca à discretização do modelo centro-periferia.

**Palavras-chave:** modelo centro-periferia, migração, aglomeração, dispersão, caos.

**Códigos JEL:** F12, R12, R23, C62, C63.

# Abstract

This dissertation aims to provide an explanation about how the time frame affects the migration dynamics in a core-periphery model with three regions. The chaotic behaviour of the solutions, non-conformant with empirical reality, observed in discrete time motivates the construction of alternative dynamics to those of Commendatore's *et al.* (2015b) model that reproduce the economic results recorded in a continuous time frame, where chaos is absent. For this comparison of the results we use Gaspar *et al.* (2013). After a detailed description of the economic framework, we proceed to the drafting of a new migration function, complying with the required assumptions. To achieve this, we adapt the work of Garrido-da-Silva *et al.* (2015) in order to consider an additional region, followed by the analytical study, supplemented by numerical simulation in MATLAB/Octave, of the fixed points and stability conditions. The desired confluence of the conclusions obtained in discrete time with those formulated in continuous time is observed, providing economic interpretations of the visible distribution patterns of economic activity among the three regions. As a final point, the hypothesis that the occurrence of deterministic chaos is an intrinsic characteristic of the discrete time specification of the core-periphery model is rejected.

**Keywords:** core-periphery model, migration, agglomeration, dispersion, chaos.

**JEL Classification Numbers:** F12, R12, R23, C62, C63.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo de NEG com três regiões</b>	<b>7</b>
2.1 Pressupostos . . . . .	7
2.1.1 Preferências . . . . .	8
2.1.2 Custos comerciais . . . . .	8
2.1.3 Setor agrícola . . . . .	10
2.1.4 Setor industrial . . . . .	11
2.2 Equilíbrio geral de curto-prazo . . . . .	14
<b>3 Modelo dinâmico</b>	<b>17</b>
3.1 Equilíbrio de longo-prazo . . . . .	18
3.2 Lei de migração . . . . .	20
3.3 Duas regiões idênticas . . . . .	28
3.3.1 Dinâmica nas medianas do triângulo $R$ . . . . .	37
3.3.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade . . . . .	38
3.3.3 Diagrama de bifurcação . . . . .	46
3.4 Uma região sem indústria . . . . .	47
3.4.1 Dinâmica nas arestas do triângulo $R$ . . . . .	49
3.4.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade . . . . .	50
3.5 Três regiões com indústria . . . . .	59

3.5.1	Equilíbrio de dispersão simétrica . . . . .	60
3.5.2	Equilíbrio de aglomeração parcial . . . . .	61
3.5.3	Equilíbrio centro-periferia . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Dinâmica alternativa</b>	<b>64</b>
4.1	Migração entre regiões . . . . .	65
4.1.1	Pressupostos . . . . .	66
4.1.2	Função de migração . . . . .	67
4.1.3	Propriedades da função de migração . . . . .	68
4.2	Duas regiões idênticas . . . . .	70
4.2.1	Pontos de equilíbrio . . . . .	72
4.2.2	Estabilidade . . . . .	74
4.3	Uma região sem indústria . . . . .	81
4.3.1	Pontos de equilíbrio . . . . .	82
4.3.2	Estabilidade . . . . .	83
4.4	Três regiões com indústria . . . . .	87
4.4.1	Equilíbrio de dispersão simétrica . . . . .	89
4.4.2	Equilíbrio de aglomeração parcial . . . . .	90
4.4.3	Equilíbrio centro-periferia . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>94</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>97</b>
A	Ilustrações Complementares . . . . .	97
	<b>Bibliografia</b>	<b>101</b>

# Lista de Figuras

2.1	Equidistância entre as três regiões. . . . .	10
3.1	Espaços invariantes de $Z$ . . . . .	25
3.2	Representação gráfica de $\Delta_{i,t}$ e $\Delta_{j,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	30
3.3	Representação gráfica de $s_{i,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	30
3.4	Representação gráfica de $D_t$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	32
3.5	Representação gráfica de $K_{i,t}$ e $K_{j,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	34
3.6	Representação gráfica do rácio $R(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	37
3.7	Representação gráfica de $z_d(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	44
3.8	Trajectoria da solução de (3.15) dada uma condição inicial $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ . . . . .	45
3.9	Trajectoria da solução de (3.15) dada uma condição inicial $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$ . . . . .	45
3.10	Diagrama de bifurcação da aplicação $z_d$ , dados $\mu = 0.45$ , $\sigma = 2.5$ e $\gamma = 10$ . . . . .	46
3.11	Representação gráfica de $z_b(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	55
3.12	Trajectoria da solução de (3.25) dada uma condição inicial $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ . . . . .	56
3.13	Trajectoria da solução de (3.25) dada uma condição inicial $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ . . . . .	56
3.14	Alargamento da representação gráfica da função $z_b(\lambda_t)$ para $\phi = 0.1835$ . . . . .	57
3.15	Trajectoria da solução de (3.25) para $\phi = 0.1835$ e diferentes $\lambda_0$ . . . . .	58
3.16	Diagrama de bifurcação da aplicação $z_b$ , dados $\mu = 0.3$ , $\sigma = 1.8$ e $\gamma = 20$ . . . . .	58
3.17	Trajectoria da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de $S_s$ . . . . .	60
3.18	Trajectoria da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de $S_i$ . . . . .	61
3.19	Trajectoria da solução de (3.5) para $\lambda_{3,0} = 0$ . . . . .	62
3.20	Trajectoria da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de $CP_i$ . . . . .	63
4.1	Trajectoria da solução de (4.6) para diferentes valores de $\phi$ e $\lambda_0$ . . . . .	78



4.2	Representação gráfica de $f_d(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	79
4.3	Trajectoria da soluçao de (4.6) para $\phi = 0.25$ e $\lambda_0$ próximo de $\lambda_d$ . . . . .	80
4.4	Estados de equilíbrio em ordem a $\phi$ para diferentes condições iniciais. . . . .	80
4.5	Representação gráfica de $f_b(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	85
4.6	Trajectoria da soluçao de (4.9) para diferentes valores de $\phi$ e $\lambda_0$ . . . . .	86
4.7	Padrões de aglomeração em ordem a $\phi$ para diferentes condições iniciais. . . . .	86
4.8	Trajectoria da soluçao de (4.12) com condições iniciais próximas de $S_s$ . . . . .	90
4.9	Trajectoria da soluçao de (4.12) com condições iniciais próximas de $S_i$ . . . . .	92
4.10	Trajectoria da soluçao de (4.12) para $\phi = 0.25$ e diferentes $\lambda_0$ . . . . .	92
4.11	Trajectoria da soluçao de (4.12) com condições iniciais próximas de $CP_i$ . . . . .	93
4.12	Trajectoria da soluçao de (4.12) com início no equilíbrio $(0, 0, 1)$ . . . . .	93
A.1	Representação gráfica de $\Delta_{i,t}$ e $\Delta_{j,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	97
A.2	Representação gráfica de $s_{i,t}$ , $s_{j,t}$ e $s_{k,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	98
A.3	Representação gráfica de $D_t$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	98
A.4	Representação gráfica de $K_{i,t}$ e $K_{j,t}$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	99
A.5	Representação gráfica de $R(\lambda_t)$ para diferentes valores de $\phi$ . . . . .	100

# 1 Introdução

A Economia Geográfica intenta perceber, segundo Ottaviano e Thisse (2004), quais as forças económicas que podem sustentar, no longo prazo, uma distribuição espacial não equitativa das atividades económicas, procurando dar resposta a questões como ‘O que leva as empresas a estabelecerem-se em certos lugares em vez de outros?’ ou ‘De que forma as suas decisões se relacionam com as de outras empresas?’. Para inferir a respeito de questões desta índole, comece por refletir-se acerca da sociedade de consumo em que vivemos. A busca pela satisfação das suas múltiplas e incessantes necessidades conduz à deslocação dos consumidores para certos locais onde se esperam satisfazer por meio de uma variada gama de produtos que encontram à sua disposição. Por sua vez, as lojas escolhem situar-se nesses lugares por saberem que terão acesso a um vasto leque de potenciais compradores. É esta lógica circular que sustenta o processo de aglomeração económica (Fujita *et al.*, 1999). Por ser este um conceito bastante genérico, pode contemplar situações reais muito diferentes: por um lado, pode corresponder a uma divisão Norte-Sul; por outro, à situação anteriormente descrita, i.e., quando produtos similares se concentram na mesma vizinhança (Fujita e Thisse, 2009).

Apesar do interesse e relevância desta área, a investigação foi condicionada, no entender de Fujita *et al.* (1999), pela existência de barreiras técnicas, de entre as quais se salienta o papel dos rendimentos crescentes à escala. É com a introdução de novas ferramentas de modelação que surge a Nova Economia Geográfica (NEG), uma abordagem com fundamentos microeconómicos que tem sido aplicada para discutir a interação entre custos de transporte e rendimentos crescentes à escala, desencadeadora de desigualdades na distribuição da atividade económica e repartição de rendimentos.

Krugman (1991) foi pioneiro na oferta de um modelo de equilíbrio geral que procura explicar *porquê*, *como* e *quando* a atividade económica se pode concentrar em poucos lugares. O modelo Centro-Periferia (CP) é construído originalmente para duas regiões e dois setores: o agrícola, perfeitamente concorrencial, que produz um bem homogéneo sob rendimentos constantes à escala e custos de transporte nulos; e o industrial, que produz bens diferenciados sob rendimentos crescentes à escala, num mercado que se caracteriza por concorrência monopolística à Dixit-Stiglitz<sup>1</sup> (1977) e custos de transporte do tipo *iceberg*, cuja consideração implica a perda de parte dos bens transferidos no próprio ato de transação. Por cada unidade enviada de uma região para outra, apenas chega ao seu destino uma fração  $1/T$ , com  $T > 1$ . A distância tem, assim, um papel fundamental na determinação dos preços. Ademais, Fujita e Thisse (1996) explicam que a mera existência de indivisibilidades na produção torna lucrativo para as empresas concentrá-la num número limitado de lugares, servindo consumidores dispersos. Os rendimentos crescentes à escala constituem, por isso, uma força centrípeta. Todavia, a extensão geográfica dos mercados e os correspondentes custos de transação elegem a dispersão da procura como uma força centrífuga, tornando claro o *trade-off* entre economias de escala e custos de transporte.

Como fatores de produção consideram-se trabalhadores agrícolas, imóveis entre regiões, e trabalhadores industriais, móveis. Pelo facto de basearem os últimos as suas decisões de migração na diferença entre os salários reais, deslocar-se-ão para a região que oferece maior remuneração, podendo surgir convergência ou divergência entre elas. O que Krugman (1991) verifica é que, para custos de transporte inferiores a um certo nível crítico, as empresas industriais concentram-se numa única região (centro), enquanto a outra se especializa no setor tradicional (periferia) - *equilíbrio de aglomeração*. Ao invés, para custos de transporte suficientemente elevados, a atividade industrial distribui-se equitativamente entre as regiões - *equilíbrio de dispersão simétrica*. Regiões *ex-ante* idênticas podem, então, diferir *ex-post*. Dessarte, com o progresso técnico espera-se,

---

<sup>1</sup>Uma estrutura de mercado determinada por gostos heterogéneos dos consumidores e recursos produtivos limitados (Ottaviano e Thisse, 2004).

ante o modelo de Krugman (1991), a prevalência da aglomeração (Tabuchi, 1998).

De acordo com Puga (1998), a ocorrência de divergência ou convergência entre regiões fundamenta-se por meio de dois basilares efeitos<sup>2</sup>: *concorrência* e *ligação*. O primeiro dos efeitos deriva do aumento da competição com a entrada de uma nova empresa no mercado local. Em consequência, o salário que as empresas instaladas estão dispostas a pagar diminui, levando à deslocalização dos trabalhadores. A dispersão ocasiona, deste modo, a convergência entre regiões. Operando na direção contrária, os efeitos de ligação encorajam a concentração, dado que um maior número de trabalhadores na região aumenta a despesa nela realizada, os lucros das empresas locais e permite o pagamento de salários mais elevados, tornando a localização mais atrativa à produção e residência. Tal significa maior variedade, preços mais baixos e bem-estar superior. A aglomeração atua, assim, como uma fonte de divergência ou desigualdade.

A mobilidade dos trabalhadores industriais ocupa neste modelo um lugar central, visto que a sua deslocação entre regiões implica que a oferta e a procura se modifiquem também. O processo de causalidade circular do qual a aglomeração, como tem sido explicada, emana tem, por isso, na migração a sua essência (Fujita e Thisse, 2009). Porém, Ottaviano e Puga (1998) consideram que, muito embora o modelo *standard* seja relevante na explicação da aglomeração dentro de fronteiras, num contexto internacional podem surgir barreiras à migração que limitem o seu papel. As externalidades pecuniárias que derivam, em Krugman (1991), da interação entre custos de transporte e deslocação dos trabalhadores são, perante restrições à mobilidade, substituídas pelas relações entre empresas<sup>3</sup>: Krugman e Venables (1995) consideram imobilidade dos trabalhadores e empresas produtoras de bens intermédios; Puga (1999) faz depender a sua análise da (i)mobilidade dos trabalhadores em resposta às diferenças salariais. O declínio, a longo prazo, dos custos de transporte, produzido pela integração económica

---

<sup>2</sup>Que encontram os seus homólogos no trabalho de Krugman (1991), como *market crowding effect*; *home market effect* e *price index effect*. Refira-se que os dois últimos se designam em Forslid e Ottaviano (2003) como *market size effect* e *cost-of-living effect*, respetivamente.

<sup>3</sup>A este respeito, Venables (1996) mostra que as relações verticais entre empresas a montante e a jusante, quando ambas estão sujeitas a concorrência imperfeita, podem desempenhar um papel equivalente ao da migração do fator trabalho.

dos mercados mundiais, afigura-se, em Krugman e Venables (1995), suficiente para produzir uma divisão entre países ricos e países pobres e, posteriormente, uma convergência entre os seus rendimentos, deixando, neste caso, de ser monótona a relação entre integração e aglomeração (Puga, 1999). Associa-se a este padrão de desenvolvimento espacial mais rico uma curva em forma de sino (Fujita e Thisse, 2009).

Desde Krugman (1991) que a comunidade científica se tem dedicado à construção e estudo de modelos de NEG que congregam, na linha do que tem vindo a ser referido, alguns ingredientes capitais: rendimentos crescentes à escala e produção diferenciada de bens industriais; distância entre regiões mensurada por custos de transporte; e mobilidade do fator trabalho, ocasionada por diferenças entre os salários reais e comumente descrita por um processo de realocação dos trabalhadores num quadro temporal contínuo (Commendatore *et al.*, 2015b). Assumem uma economia composta por duas regiões idênticas, i.e., dotadas da mesma tecnologia, preferências e custos de transporte, dois setores produtivos e migrantes míopes, cujas decisões baseadas nos salários correntes ignoram o futuro. Por serem estes pressupostos redutores na explicação que se busca obter, alguns autores optam por modificá-los, entre os quais: Baldwin (2001), pela incorporação de expectativas *forward-looking*; Tabuchi e Thisse (2002), com preferências heterogêneas; Leite *et al.* (2009), assumindo custos de transporte assimétricos; e Leite *et al.* (2013), mediante a introdução de um setor de bens não-transacionáveis.

É perante a constatação de que o modelo de Krugman (1991) é muito difícil de trabalhar e a maioria dos seus resultados exige simulação numérica que Forslid e Ottaviano (2003) introduzem algumas modificações<sup>4</sup> que o tornam analiticamente resolúvel. O modelo ‘Footloose Entrepreneur’ (FE) considera heterogeneidade no que às competências dos trabalhadores importa: distingue qualificados de não qualificados e restringe a mobilidade aos primeiros. A função custo de produção releva as diferenças entre os dois modelos ao considerar o trabalho móvel somente como uma componente de custo fixo.

O intento de conferir a estes dois modelos uma maior adequação à realidade motiva a

---

<sup>4</sup>Estas modificações permitem, nomeadamente, determinar o número exato de equilíbrios, estudar as suas propriedades e estabilidade local.

adição de mais regiões e questiona se as conclusões retiradas se mantêm. Neste sentido, Fujita *et al.* (1999) investigam uma economia com  $n$  regiões distribuídas ao longo de um círculo; Castro *et al.* (2012) concluem que a adição de uma região no modelo CP favorece a concentração económica; Gaspar *et al.* (2013) estendem o modelo FE para três regiões, corroborando as conclusões de Castro *et al.* (2012), porém sendo capazes de obter soluções explícitas para os salários dos trabalhadores qualificados e concluir sobre a sua distribuição espacial e as variáveis endógenas do modelo.

Uma outra questão interessante passa por avaliar a robustez das conclusões face à variável temporal, por intermédio da discretização da dinâmica de migração. Currie e Kubin (2006) indagam esta questão perante as conclusões de Fujita *et al.* (1999), ao passo que Commendatore *et al.* (2008) tomam por base Forslid e Ottaviano (2003); Commendatore e Kubin (2013) e Commendatore *et al.* (2015b) partem da versão de Commendatore *et al.* (2008) e acrescem uma região<sup>5</sup>; Commendatore *et al.* (2015c) apresentam um modelo que contém dois países, divididos simetricamente em duas regiões, e introduzem heterogeneidade na estrutura geográfica. Todos estes trabalhos, embora preservem grande parte das características dos seus homólogos em tempo contínuo, remetem para a existência de caos no longo prazo, o que levanta interrogações quanto ao modo como o enquadramento temporal afeta as dinâmicas de migração.

O foco desta dissertação é precisamente o esclarecimento da relação entre a dinâmica de migração quando se toma o tempo variando de forma discreta e contínua. Para tal, toma-se por base Commendatore *et al.* (2015b), que propõem um modelo de NEG em tempo discreto que descreve a forma como a atividade económica industrial se tende a dispersar ou aglomerar, no longo prazo, entre três regiões idênticas. Todavia, a alteração do quadro temporal para discreto e a adição de uma região ocasionam um comportamento caótico das soluções que está ausente nas versões em tempo contínuo, como em Gaspar *et al.* (2013). O caos é neste contexto interpretado como a movimentação desorganizada da mão-de-obra industrial entre regiões, que não encontra paralelo na re-

---

<sup>5</sup>O primeiro destes trabalhos analisa a estabilidade local dos pontos fixos e apresenta resultados preliminares sobre a dinâmica global, que são posteriormente aprofundados no segundo, com particular incidência sobre os cenários de bifurcação que podem ser observados.

alidade empírica por mais que se estenda o horizonte temporal. Esta contradição, que foi já estudada num contexto de duas regiões por Garrido-da-Silva *et al.* (2015) tendo por base Currie e Kubin (2006), dá o mote à presente dissertação. Após determinar quais as características desencadeadoras do caos, Garrido-da-Silva *et al.* (2015) propõem uma nova discretização, formulada para ser o mais próxima possível dos resultados em tempo contínuo de Fujita *et al.* (1999). As funções de migração que sugerem assentam no pressuposto de que a migração dos trabalhadores industriais ocorre enquanto persistirem diferenças entre os salários reais e consentem a desejada convergência entre os resultados. Com esta dissertação pretende-se identicamente, mas para três regiões, responder às seguintes questões de investigação:

1. É possível eliminar o comportamento caótico irrealista observado no modelo de Commendatore *et al.* (2015b) por meio de dinâmicas discretas alternativas e confluir os resultados com os propostos por Gaspar *et al.* (2013) em tempo contínuo?
2. Sendo possível eliminar o comportamento caótico, que comportamento é observado? Qual o seu significado económico?

Começa-se por introduzir o modelo de Commendatore *et al.* (2015b) no Capítulo 2, apresentando os seus pressupostos e caracterizando o equilíbrio geral de curto-prazo. No capítulo 3, divulga-se a dinâmica de migração a que obedece, indo além do trabalho original na sua explicação. Determinam-se os pontos fixos e recorre-se a *software* computacional para produzir gráficos que auxiliam no estudo da estabilidade local. A dinâmica alternativa é proposta no Capítulo 4, onde se avançam as características que deve satisfazer e que dão origem à nova função de migração. Procede-se, para esse fim, à adaptação da forma funcional proposta por Garrido-da-Silva *et al.* (2015), a fim de contemplar uma região adicional. O estudo qualitativo ocorre por via analítica complementada por recurso a simulação numérica. Completa-se a secção pela comparação do comportamento de longo prazo manifesto pela nova dinâmica com as conclusões em tempo contínuo enunciadas por Gaspar *et al.* (2013), anunciando-se a esperada confluência entre os dois trabalhos. O último capítulo finaliza com as conclusões.

## 2 Modelo de NEG com três regiões

A adição de regiões à tradicional análise contemplativa de duas reflete-se na emergência de efeitos outrora ausentes, na medida em que, como constata Fujita e Thisse (2009):

Quando existem apenas duas regiões, qualquer mudança nos parâmetros estruturais afeta, necessariamente, ou uma das regiões, ou ambas, de forma direta. Pelo contrário, quando existem mais de duas regiões, qualquer mudança nos parâmetros que envolve diretamente apenas duas delas, gera efeitos espaciais que são suscetíveis de afetar as restantes regiões. (p. 117, tradução livre)

A captura dos efeitos descritos conduz Commendatore *et al.* (2015b) ao desenvolvimento de um modelo de NEG com três regiões em tempo discreto. O capítulo que se inicia toma por base este trabalho, completando-se com as publicações de Commendatore e Kubin (2013), Forslid e Ottaviano (2003), Gaspar *et al.* (2013), Garrido-da-Silva *et al.* (2015) e Commendatore *et al.* (2015a), preservando a notação dos primeiros.

### 2.1 Pressupostos

O modelo considera uma economia composta por três regiões,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , que se assumem idênticas por serem caracterizadas pela mesma tecnologia, preferências e custos de transporte. Existem dois setores produtivos: o setor agrícola ( $A$ ), que produz um bem homogêneo sob rendimentos constantes à escala; e o setor industrial ( $M$ ), imperfeitamente concorrencial e que produz bens diferenciados. São igualmente dois os tipos de agentes envolvidos na produção: trabalhadores qualificados ( $N$ ) e trabalhadores não qualificados ( $L$ ), dotados, respetivamente, de capital humano e trabalho.



### 2.1.1 Preferências

As preferências do consumidor representativo são descritas por uma função de utilidade  $U_t$  do tipo Cobb-Douglas, que indica o nível de satisfação proporcionado pelo consumo combinado de um bem agrícola,  $C_{A,t}$ , com um bem compósito de variedades industriais,  $C_{M,t}$ , no instante  $t$ . Considerando  $1 - \mu$  e  $\mu$  como as quotas (invariantes) de rendimento destinadas, por esta ordem, ao consumo do bem agrícola e produtos industriais, com  $0 < \mu < 1$ , a função utilidade vem expressa por

$$U_t \equiv U(C_{A,t}, C_{M,t}) = C_{A,t}^{1-\mu} C_{M,t}^{\mu} . \quad (2.1)$$

Designando por  $c_{i,t}$  o consumo do bem industrial  $i$  no instante  $t$ ; por  $n_t$  o número total de variedades; e por  $\sigma > 1$  a constante de elasticidade de substituição entre os bens industriais,  $C_{M,t}$ , representativo da escolha entre as diversas variedades industriais, é determinado por uma função de utilidade CES:

$$C_{M,t} = \left[ \sum_{i=1}^{n_t} c_{i,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} . \quad (2.2)$$

O gosto dos consumidores por variedade é tanto maior quanto menor  $\sigma$ . Note-se que  $\sigma$  representa, ao mesmo tempo, a elasticidade-preço da procura de uma qualquer variedade industrial (Forslid e Ottaviano, 2003). Assim sendo,  $\sigma > 1$  retrata uma procura elástica, tanto mais sensível a alterações dos preços quanto maior o valor atribuído a este parâmetro.

### 2.1.2 Custos comerciais

A distância entre as regiões desempenha um papel fundamental nos modelos de NEG, na medida em que a troca pode ser inibida por vários tipos de custos comerciais, desde o transporte a barreiras (aduaneiras ou não). Sendo uma importante componente dos preços praticados, a maneira como estes são afetados depende da própria configuração

do modelo. É comum assumir-se que a comercialização do bem agrícola está isenta de qualquer custo, enquanto o transporte dos bens industriais incorre num custo do tipo *iceberg*, o que significa que se uma unidade de um bem é enviada de uma região  $i$  para uma região  $j$ , apenas uma fração  $1/T_{ij}$ , com  $T_{ij} \in [1, +\infty[$ , chega ao seu destino.

Forslid e Ottaviano (2003) definem  $\phi_{ij} \equiv T_{ij}^{1-\sigma} \in (0, 1]$  como um indicador do grau de *liberdade comercial* ou de *integração económica* dos mercados. Esta relação entre  $\phi$  e  $T$  descreve a inibição (promoção) da troca comercial entre regiões motivada por custos de transporte muito elevados (reduzidos) que constituem barreiras (estímulos) ao livre-comércio. No limite,  $\phi \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) respeita a custos de comércio proibitivos, encontrando-se as regiões a operar em regime de autarcia. Em contraste,  $\phi = 1$  ( $T = 1$ ) isenta a troca comercial de custos, equivalendo o comércio inter-regional à troca dentro da mesma região. No que concerne ao grau de integração da economia, composta pelas três regiões, podemos, então, representar a seguinte matriz<sup>1</sup>:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}.$$

O comércio dentro de uma região não implica qualquer custo, visto que a distância dentro da mesma não tem impacto no preço praticado. Assim sendo,  $\phi_{ii} = 1$  ( $T_{ii} = 1$ ), pelo que na diagonal da matriz  $\boldsymbol{\phi}$  apenas se registam elementos que igualam a unidade. Assumindo simetria entre as regiões no que respeita aos custos de transporte, tem-se que  $\phi_{ij} = \phi_{ji} = \phi$  ( $T_{ij} = T_{ji} = T$ ), o que faz com que a matriz seja simétrica e dada por

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi \\ \phi & 1 & \phi \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix},$$

com  $\phi \leq 1$ . Quer isto dizer que as três regiões são equidistantes ou, equivalentemente, que se podem representar como localizadas nos vértices de um triângulo equilátero  $R$ ,

---

<sup>1</sup>Aplicada ao caso de três regiões a partir de Commendatore *et al.* (2015a), p. 19.

como o que consta da Figura 2.1. Em suma, são três os parâmetros determinantes do carácter do equilíbrio deste modelo:  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\phi$  sentenciam, de facto, a convergência ou divergência entre o total de população qualificada em cada região.

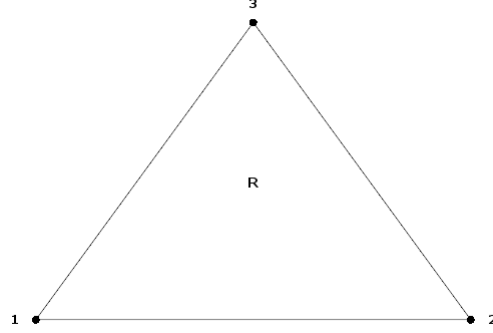


Figura 2.1: **Equidistância entre as três regiões.**

### 2.1.3 Setor agrícola

A produção do bem homogéneo agrícola requer somente o uso de trabalho não qualificado, que se assume imóvel entre as regiões. A dotação de mão-de-obra não qualificada em cada região  $i$  é, por isso, homogénea e dada por  $L_i = L/3$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Para produzir uma unidade do produto agrícola é empregue uma unidade de  $L$ , donde resulta uma equivalência entre custo unitário de produção e vencimento de um trabalhador não qualificado. Sejam  $p_{i,t}^A$  e  $w_{i,t}^A$ , respetivamente, o preço e a remuneração praticados no setor  $A$  em  $i$ . A concorrência perfeita a que se encontra sujeito o setor obriga à fixação de um preço igual ao custo marginal, de modo que, com custos de transporte nulos, se tem  $p_{i,t}^A = w_{i,t}^A, \forall i$ , uniformizando as regiões em termos de quantia a pagar pelo bem. Sendo frequente assumir-se um preço numérico, tem-se  $w_t^A = p_t^A = 1$ .

Esta uniformização mantém-se desde que esteja assegurada a laboração do setor  $A$  em todas as regiões. Denotando por  $Y_t$  o rendimento total da economia no instante  $t$ ,  $(1 - \mu)Y_t$  representa a despesa máxima que pode ser realizada na aquisição do bem agrícola. A maximização de (2.1) em ordem a  $C_{A,t}$  exige, por conseguinte, o cumprimento da restrição orçamental  $p_t^A C_{A,t} \leq (1 - \mu)Y_t$ . Imediatamente vem que  $(1 - \mu)Y_t > \frac{L}{3}$  é condição necessária para que uma região seja, por si só, incapaz de satisfazer a procura

global em termos do bem agrícola (Commendatore e Kubin, 2013). Sem embargo, a existência do setor agrícola nas três regiões é suficientemente garantida pela satisfação da desigualdade  $(1 - \mu)Y_t > \frac{2L}{3}$ . Assumindo a condição de não-especialização, a despesa total no bem  $A$  deve, portanto, superar a produção efetuada em duas das três regiões.

### 2.1.4 Setor industrial

Diferentemente de Krugman (1991), modelos que assentam no trabalho de Forslid e Ottaviano (2003) assumem trabalhadores dissemelhantes em termos de competências, requerendo a produção industrial o uso de ambos os fatores de produção: trabalho qualificado e não qualificado. Ao contrário da mão-de-obra não qualificada, os trabalhadores qualificados gozam de mobilidade entre regiões<sup>2</sup>. É justamente esta mobilidade que se manifesta, no longo prazo, como geradora de possíveis assimetrias entre as regiões.

A estrutura de concorrência monopolística à Dixit-Stiglitz (1977) alia a produção diferenciada, por empresas idênticas, de bens industriais com rendimentos crescentes à escala. A produção de um bem requer um contributo fixo de uma unidade de trabalho qualificado e um contributo variável de  $\beta$  unidades de trabalho não qualificado, pelo que o custo médio é decrescente com a quantidade produzida. O gosto dos consumidores pela variedade e a não existência de economias de gama implicam que cada empresa produza sempre uma única variedade, diferente da das restantes. Ora, como a produção de cada variedade adicional requer uma unidade de trabalho qualificado, o número total de empresas/variedades equivale sempre ao número de trabalhadores qualificados,  $N$ , estabelecendo-se uma relação de um para um entre empresas e variedades.

Seja  $\lambda_{i,t}$  a percentagem de trabalhadores qualificados na região  $i$  no instante  $t$ , com  $0 \leq \lambda_{i,t} \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,t} = 1$ . Entenda-se que esta última condição decorre de se assumir constante o número de trabalhadores qualificados  $N$  e faz equivaler o triângulo  $R$ , que consta da Figura 2.1, a um simplex. Designando por  $n_{i,t}$  o número de variedades produzidas na região  $i$  no instante  $t$ , tem-se a seguinte relação

---

<sup>2</sup>Esta é uma hipótese que Forslid e Ottaviano (2003) declaram se ajustar mais satisfatoriamente à realidade europeia, onde se regista maior mobilidade dos trabalhadores qualificados face aos restantes.

$$n_{i,t} = \lambda_{i,t} N. \quad (2.3)$$

Cada consumidor residente em  $i$  paga pela aquisição de uma variedade o preço de fábrica  $p_{i,t}$ . Contudo, ao preço de uma variedade produzida em  $i$  e vendida em  $j$  acresce o custo com a fração do produto que derrete na transação, devido à assunção de custos de transporte do tipo *iceberg*. Tem-se, portanto, que  $p_{ii} = p$  e  $p_{ij} = pT_{ij} = p\phi^{\frac{1}{1-\sigma}}$ .

A simetria de custos entre regiões faz com que o índice de preços industrial, indicador da despesa mínima necessária à aquisição de uma unidade do bem compósito industrializado  $C_{M,t}$ , se defina por

$$P_{i,t} = \left( \sum_{j=1}^3 n_{j,t} p^{1-\sigma} T_{ij}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} = \Delta_{i,t}^{\frac{1}{1-\sigma}} N^{\frac{1}{1-\sigma}} p, \quad (2.4)$$

com  $\Delta_{i,t}$  determinada por

$$\Delta_{i,t} = \lambda_{i,t} + \phi(1 - \lambda_{i,t}). \quad (2.5)$$

Esta variável é interpretada neste trabalho como a apreciação, que é feita por um produtor ativo na região  $i$ , ao potencial oferecido pelos mercados doméstico e exterior, em função do grau de integração económica dos mercados e ponderada pela percentagem de trabalhadores qualificados em cada um deles.

Por (2.4) torna-se claro que o índice  $P_{i,t}$  diminui com o número de empresas locais. Trabalhadores residentes numa região com maior população enfrentam, em consequência, preços menores no que aos produtos industriais concerne. O seu bem-estar é, por esse motivo, superior (*cost-of-living effect*). A intensificação da concorrência trazida no surgimento de novas variedades ocasiona, no imediato, um comportamento desviante dos consumidores, patenteado por um decréscimo na procura por empresa instalada (*market crowding effect*). Não obstante, enquanto uma parte da receita gerada pelas entrantes for aplicada localmente, a despesa e, consequentemente, o lucro dos produtores ativos na região, aumentam, tanto mais quanto maior  $\mu$  (*market size*

*effect*). A concomitância e intensidade dos efeitos descritos justificam a dispersão ou aglomeração da atividade económica industrial (Forslid e Ottaviano, 2003).

A decisão ótima dos consumidores residentes em  $j$  relativamente a uma variedade produzida na região  $i$  resulta da maximização de (2.2) sujeita à sua restrição orçamental, tal que o rendimento máximo disponível para a aquisição do bem composto industrial é  $\mu Y_{j,t}$ , sendo  $Y_{j,t}$  o rendimento logrado na região  $j$ . Define-se  $s_{j,t} \equiv Y_{j,t}/Y_t$  como a quota-parte da despesa total que é realizada na região  $j \in \{1, 2, 3\}$ . A procura por variedade na região  $i$  é

$$d_{i,t} = \left( \sum_{j=1}^3 \mu Y_{j,t} P_{j,t}^{\sigma-1} T_{ij}^{1-\sigma} \right) p^{-\sigma} = \mu Y_t \left( \sum_{j=1}^3 s_{j,t} P_{j,t}^{\sigma-1} \phi_{ij} \right) p^{-\sigma}. \quad (2.6)$$

Seja  $w_{i,t}$  o salário nominal auferido por um trabalhador qualificado na região  $i$  no instante  $t$ . Uma empresa a operar em  $i$  que produza uma quantidade de  $x_{i,t}$  tem um custo fixo de  $w_{i,t}$  e um custo variável de  $w_t^A \beta x_{i,t}$ . Com  $w_t^A = 1$ , a função custo total de produção é dada por

$$\begin{aligned} CT_{i,t}(x_{i,t}) &= w_{i,t} + w_t^A \beta x_{i,t} \\ &= w_{i,t} + \beta x_{i,t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

É precisamente na função custo de produção que as diferenças entre os modelos CP e FE se fazem notar: enquanto no primeiro o trabalho móvel entra na produção tanto como uma componente de custo fixo como variável, no último o trabalho móvel é empregue na produção de bens industriais como um custo fixo e o imóvel como um custo variável, o que reduz substancialmente a complexidade do modelo.<sup>3</sup>

Com a venda a um preço local de  $p_{i,t}$ , a empresa especializada numa determinada variedade ativa em  $i$  obtém uma receita de  $p_{i,t} x_{i,t}$ . Resultante da diferença entre os seus proveitos e os seus custos, o excedente económico de um produtor é

---

<sup>3</sup>Para além da conveniência analítica, Forslid e Ottaviano (2003) justificam esta assunção pela frequente inclusão nos custos fixos de atividades de I&D ou outras que exigem elevadas competências.

$$\begin{aligned}
\pi_{i,t} &= p_{i,t}x_{i,t} - w_t^A \beta x_{i,t} - w_{i,t} \\
&= (p_{i,t} - \beta)x_{i,t} - w_{i,t}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Cada produtor maximiza (2.8) tendo por base a elasticidade-preço da procura percebida de  $\sigma$ . A estratégia ótima passa por fixar um preço proporcional a uma *mark-up* sobre o custo marginal  $\beta$ , que é independente das estratégias de preços das empresas rivais e constante entre as variedades de uma região, de tal modo que

$$\begin{aligned}
p \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) &= \beta \\
\Leftrightarrow p &= \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Observa-se, por certo, que  $\sigma > 1$  garante um preço que excede o custo marginal, tanto mais quanto menos elástica a procura. Note-se que (2.9) difere do modelo CP original ao não depender da remuneração do trabalho qualificado, mas sim do vencimento atribuído a um trabalhador não qualificado, sendo a uniformização deste vencimento entre as regiões premissa necessária à solvabilidade do modelo FE (Gaspar *et al.*, 2013).

## 2.2 Equilíbrio geral de curto-prazo

Um equilíbrio geral de curto-prazo define-se, no instante  $t$ , como uma dada distribuição espacial dos trabalhadores qualificados entre as três regiões, correspondendo a um vetor exógeno de percentagens  $(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}, \lambda_{3,t})$ . Este estado caracteriza-se pela compensação em todos os mercados, assistindo-se, simultaneamente, à igualdade entre a oferta e a procura nos mercados agrícola, industrial e laboral. Consequentemente, o equilíbrio no mercado do produto estabelece o encontro entre a quantidade oferecida e a quantidade procurada de cada variedade, ditando a igualdade

$$x_{i,t} = d_{i,t}. \tag{2.10}$$

A maximização dos lucros de uma empresa de acordo com a função procura expressa em (2.6) permite apurar a quantidade e o preço que vigoram no mercado em equilíbrio. De (2.8) e (2.9) vem que o lucro económico por variedade/empresa na região  $i$  pode ser apresentado como o quociente entre o valor das vendas e  $\sigma$ , pois

$$\pi_{i,t} = px_{i,t} - \beta x_{i,t} = \frac{\beta}{\sigma - 1} x_{i,t} = \frac{px_{i,t}}{\sigma}. \quad (2.11)$$

Seja  $\mu Y_t$  a despesa que é realizada no consumo do bem compósito industrial nas três regiões. A fração do lucro total que corresponde ao setor industrial é, por conseguinte,  $\mu Y_t / \sigma$ . Posto isto, o rendimento total da economia obtém-se pela adição do contributo do setor agrícola, que concerne ao salário auferido pelos trabalhadores não qualificados, visto os proveitos do setor compensarem, na exata medida, os seus custos. Em número  $L$  e remunerados a  $w_t^A = 1$ , tem-se  $Y_t = L + \mu Y_t / \sigma$ , de tal modo que o produto é

$$Y_t = \frac{\sigma L}{\sigma - \mu}. \quad (2.12)$$

Recorrendo a (2.12), o lucro que respeita aos trabalhadores qualificados vem, assim, dado por  $\mu L / (\sigma - \mu)$ .<sup>4</sup> Incorporando (2.3)-(2.12) em (2.11), vem que o lucro de equilíbrio de curto-prazo na região  $i$  no instante  $t$  é

$$\begin{aligned} \pi_{i,t} &= \left( \sum_{j=1}^3 \mu Y_{j,t} P_{j,t}^{\sigma-1} T_{ij}^{1-\sigma} \right) \frac{p^{1-\sigma}}{\sigma} \\ &= \frac{\mu Y_t}{\sigma} \left( \sum_{j=1}^3 s_{j,t} P_{j,t}^{\sigma-1} \phi_{ij} \right) p^{1-\sigma} \\ &= \frac{\mu Y_t}{\sigma N} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} \phi_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

O modelo assume que não existem barreiras à entrada ou saída, pelo que, enquanto o lucro for positivo, novas empresas serão instigadas a entrar no mercado, produzindo uma

---

<sup>4</sup>Recuperando a condição de não especialização, a desigualdade  $(1 - \mu)Y > \frac{2L}{3}$  pode ser reescrita como  $2\mu + \sigma - 3\mu\sigma > 0$ . Do mesmo modo, a condição necessária  $(1 - \mu)Y_t > \frac{L}{3}$  torna-se equivalente a  $\mu + 2\sigma - 3\mu\sigma > 0$ .



variedade distinta das restantes, enquanto a redução dos lucros determinada pela intensificação da concorrência levará outras a abandoná-lo. Efetivamente, o que a condição de livre entrada estabelece é que, em equilíbrio, são nulos os lucros operacionais e, portanto, a produção será tal que compensem exatamente os custos fixos pagos em termos de trabalho qualificado:

$$\pi_{i,t} = w_{i,t}. \quad (2.14)$$

Dessarte, o rendimento nominal da região  $i$ , coincidente com a soma dos rendimentos internos dos trabalhadores qualificados e não qualificados nela residentes, é

$$Y_{i,t} = \frac{L}{3} + \lambda_{i,t} N \pi_{i,t}. \quad (2.15)$$

Fazendo  $\lambda_{3,t} = 1 - \lambda_{1,t} - \lambda_{2,t}$ , é possível definir implicitamente a percentagem de população qualificada na região 3 como função das regiões 1 e 2. Recorrendo às equações (2.9)-(2.15), tem-se que a quota-parte da despesa total que é realizada em  $i$  é

$$s_{i,t} = \frac{\frac{\sigma - \mu}{3} + \lambda_{i,t} \mu \phi \left( \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} + \frac{1 - s_{j,t}}{\Delta_{3,t}} \right)}{\sigma - \lambda_{i,t} \mu \left( \frac{1}{\Delta_{i,t}} - \frac{\phi}{\Delta_{3,t}} \right)}, \quad (2.16)$$

com  $i, j \in \{1, 2\}$  e  $j \neq i$ . Então,  $s_{3,t} = 1 - s_{1,t} - s_{2,t}$ .

Um trabalhador qualificado residente na região  $i$  dispõe, no período  $t$ , de uma remuneração  $w_{i,t}$  destinada ao consumo do bem agrícola e dos bens industriais, dados os preços a cada momento. Porém, para que possa comparar as quantidades consumidas ao longo do tempo perante alterações dos preços, necessita de incorporar o efeito da inflação nas suas decisões de consumo. Este processo é feito pela deflação do salário nominal  $w_{i,t}$  de acordo com o índice de preços  $P_{i,t}$ , fornecendo uma medida da sua utilidade indireta. O salário real  $\omega_{i,t}$  é, por isso, definido por

$$\omega_{i,t}(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = \frac{w_{i,t}}{P_{i,t}^\mu} = \frac{\pi_{i,t}}{P_{i,t}^\mu}. \quad (2.17)$$

### 3 Modelo dinâmico

O abandono da estaticidade do modelo pela consideração do tempo permite perceber de que forma se processa a convergência para um determinado equilíbrio, operada pela migração dos trabalhadores em resposta a incentivos económicos. A sua movimentação entre as regiões implica não só alterações na dimensão dos mercados do produto e trabalho, como se repercute igualmente sobre os restantes agentes económicos, pois

quando alguns trabalhadores decidem migrar, as suas deslocações afetam o bem-estar daqueles que não se movem. De facto, a sua migração pode inclusive mudar a atratividade de ambas as regiões, partida e chegada. Estes efeitos têm a natureza de externalidades pecuniárias porque os trabalhadores não as consideram quando tomam as suas decisões. Ademais, estas externalidades assumem particular importância em mercados imperfeitamente concorrenciais, onde os preços diminuem para refletir o efetivo valor social das decisões individuais. (Fujita e Thisse, 2009, p. 113, tradução livre)

O presente capítulo introduz a dinâmica proposta por Commendatore *et al.* (2015b). A secção 3.1 enuncia os mecanismos de aglomeração e dispersão que justificam a formação de uma determinada distribuição, no longo prazo, de trabalho qualificado entre as regiões, em função do papel determinante que assumem os custos de transporte nos modelos centro-periferia. Na secção 3.2 revela-se a dita lei de migração, desencadeadora do desenquadrado comportamento das soluções à realidade, dando-se conta deste quando observado. Os principais resultados apresentam-se nas secções 3.3-3.5. Auxilia-se o estudo qualitativo então operado pela representação gráfica das funções que concorrem para a sua determinação, por recurso ao *software* MATLAB/Octave.

### 3.1 Equilíbrio de longo-prazo

A ciência económica faz uso de modelos económicos, muito embora com pressupostos simplificadores e frequentemente criticados pelo seu irrealismo, que visam prever o comportamento económico futuro. Em particular, os modelos de NEG procuram explicar, por recurso a mecanismos de aglomeração e dispersão, como se distribui, no longo prazo, a atividade económica entre regiões que se assumem *a priori* idênticas.

A passagem de um equilíbrio de curto-prazo em  $t$  para o instante  $t + 1$  ocorre pelo assentimento de uma mudança na percentagem de atividade económica industrial na região. Esta mudança é ocasionada pela movimentação dos trabalhadores qualificados em resposta a incentivos económicos, pelo que apenas tem lugar quando existe uma região de chegada que oferece um maior bem-estar, medido pelo salário real, do que a região de partida. Em conformidade, um equilíbrio de longo-prazo define-se por uma distribuição de trabalho qualificado que permanece imutável ao longo do tempo.

A este respeito, é prática de grande parte dos autores elucidar acerca do comportamento expectável da economia com base no efeito suscitado por um aumento do número de trabalhadores qualificados numa região  $i$  sobre a repartição da atividade económica industrial entre as regiões. De entre as forças de aglomeração destacam-se os já referidos efeitos *market size* e *cost-of-living*<sup>1</sup>. Quanto ao primeiro, comece por notar-se que o acréscimo do fator trabalho provoca um aumento da despesa local que, em termos do modelo, se reflete em  $s_i$ , dada por (2.16). Por sua vez, a maior dimensão do mercado expressa-se na oferta de uma remuneração  $w_i$  superior, por (2.14) igual a  $\pi_{i,t}$ , o que atrai a instalação de novas empresas na região. Ora, a produção de mais variedades em  $i$  implica uma menor importação de bens industriais. Por não serem os bens alvo de importações, o seu preço não está sujeito à imposição de um custo de transporte, o que se traduz num índice de preços regional  $P_{i,t}$  mais baixo, como se verifica em (2.4), e, consequentemente, num maior poder de compra. Sobe, por isso,  $\omega_i$ , definido por (2.17). Mais trabalhadores serão, isto posto, incentivados a migrar para a região  $i$ , com o se-

---

<sup>1</sup>Em português ter-se-ia ‘efeito dimensão do mercado’ e ‘efeito custo de vida’ ou ‘índice de preços’.

gundo dos efeitos a robustecer o primeiro. Como mecanismo que favorece a dispersão, tem-se a intensificação da *concorrência* na região, o designado *market crowding effect*<sup>2</sup>. O aumento do número de empresas a operar em  $i$  implica uma menor procura por variedade, menores lucros, menores salários e, portanto, menos incentivos à migração.

*Mas se as forças expostas até então atuam em sentido contrário, como determinar quais prevalecem num determinado momento?*

A resposta a esta questão depende dos custos de transporte  $T$  ou, se se quiser, do grau de integração económica  $\phi$  existente nesse momento, daí que, em toda a análise precedente, se façam variar persistentemente os valores deste parâmetro perante a constância de  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\gamma$ , por recurso a simulação numérica. A literatura centro-periferia designa por pontos de *rutura* e *sustentação* os níveis de  $T$  a partir dos quais, respetivamente, a dispersão simétrica se torna instável e a aglomeração se torna sustentável. Em face de custos de transporte suficientemente elevados, incorporados no modelo por montantes de  $\phi$  mais reduzidos, predomina sobre os restantes o efeito *concorrência*, conduzindo à dispersão da atividade económica industrial entre as três regiões. Como equilíbrio de longo-prazo tem-se, neste caso, a *dispersão simétrica*. Todavia, espera-se que a abertura dos mercados elimine totalmente as barreiras à troca, incluindo os custos de transação, levando à equalização dos preços e fatores produtivos entre regiões. Este é, contudo, um processo gradual que torna, progressivamente, menos relevante a localização dos concorrentes. O enfraquecimento do efeito da concorrência faz prevalecer os mecanismos de aglomeração, dando forma a uma estrutura *centro-periferia*, na qual a atividade económica se concentra por inteiro numa das regiões. Desta forma, referem Fujita e Thisse (2009), os produtores são capazes de explorar os rendimentos crescentes à escala ao vender mais bens no mercado de maior dimensão, sem perder muita da quota de mercado no de menor. Acrescentam estes autores que, para valores intermédios dos custos de transporte, podem coexistir com os tradicionais os equilíbrios assimétricos, assinalando a dependência dos modelos centro-periferia face às condições iniciais.

---

<sup>2</sup>A tradução sugere ‘efeito congestionamento’.

## 3.2 Lei de migração

À imagem de Krugman (1991), Commendatore *et al.* (2015b) assumem que os trabalhadores são míopes, no sentido em que subordinam a sua localização no instante  $t + 1$  à maximização do bem-estar mensurado pela utilidade indireta corrente, i.e, o salário real auferido no período  $t$ , ignorando o futuro. Aditivamente, baseiam-se na dinâmica do replicador, amplamente usada em Teoria dos Jogos, para formular uma hipótese que faz depender a migração dos trabalhadores qualificados da comparação entre o salário real ganho na região de residência em  $t$  e a média ponderada dos salários em todas as regiões. Esta comparação toma a forma de uma diferença expressa em termos relativos.

Seja  $M_{i,t}$  a percentagem de trabalhadores qualificados na região  $i \in \{1, 2, 3\}$  em cada instante  $t$ :

$$M_{i,t} = \lambda_{i,t} \left( 1 + \gamma \frac{\omega_{i,t} - \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} \omega_{j,t}}{\sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} \omega_{j,t}} \right), \quad (3.1)$$

onde  $\gamma > 0$  representa a velocidade de migração.

Ante (3.1) suponha-se o caso em que  $\omega_{i,t} - \bar{\omega}_t < 0$ , com  $\bar{\omega}_t$  representativo do salário médio real. Haverá, portanto, um incentivo à saída trabalhadores qualificados da região  $i$ . Pode ocorrer que esta diferença seja expressiva a ponto de  $M_{i,t} < 0$ , o que traduz uma percentagem de trabalho qualificado negativa na região nesse período. Ora, no contexto do modelo tal não é passível de suceder. Um problema de natureza idêntica coloca-se perante  $M_{i,t} > 1$ . Em ordem a formular o sistema dinâmico é forçosa, por conseguinte, a imposição de restrições que se destinam a assegurar  $0 \leq \lambda_{i,t+1} \leq 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . A dinâmica de migração vem, assim, descrita pelas seguintes funções divididas em ramos:

$$\lambda_{1,t+1} = Z_1(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{1,t} < 0 \\ M_{1,t} & \text{se } 0 \leq M_{1,t} \leq 1, \\ 1 & \text{se } M_{1,t} > 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\lambda_{2,t+1} = Z_2(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{2,t} < 0 \\ M_{2,t} & \text{se } 0 \leq M_{2,t} \leq 1 \\ 1 & \text{se } M_{2,t} > 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Sendo  $\lambda_{3,t+1}$  residual relativamente a  $\lambda_{1,t+1}$  e  $\lambda_{2,t+1}$ , tem-se

$$\lambda_{3,t+1} = Z_3(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 - M_{1,t} - M_{2,t} < 0 \\ 1 - M_{1,t} - M_{2,t} & \text{se } 0 \leq 1 - M_{1,t} - M_{2,t} \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 - M_{1,t} - M_{2,t} > 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Tendo presente a exigência de se verificarem, em simultâneo, as condições impostas por (3.2)-(3.4), justifica-se alguma interpretação das combinações que das restrições possam surgir aquando da resolução do modelo. Três casos lançam-se a debate, um deles não carecendo de explicações adicionais:  $M_{i,t} \leq 0$  fixa  $\lambda_{i,t+1} = 0$ . Os restantes dois subdividem-se em duas ocorrências particulares, de modo que:

1. Se  $M_{i,t}, M_{j,t} > 0$ , assiste-se, no final do instante  $t$ , à migração de mão-de-obra qualificada para as regiões  $i$  e  $j$ , onde:
  - (a)  $\lambda_{i,t+1}$  corresponde a  $M_{i,t}$ , livre de restrições, se e só se  $M_{i,t} + M_{j,t} < 1$ , tal implicando  $M_{3,t} = 1 - M_{i,t} - M_{j,t} > 0$ . Quer isto dizer que, neste caso em particular, existe mão-de-obra qualificada nas três regiões;
  - (b)  $M_{i,t} + M_{j,t} \geq 1$  implica, pelo contrário, uma região 3 destituída de setor industrial e uma percentagem  $\lambda_{i,t+1}$  que deixa de se reger livremente por  $M_{i,t}$ , por forma a garantir  $\lambda_{i,t+1} + \lambda_{j,t+1} = 1$ . Commendatore *et al.* (2015b) asseguram esta eventualidade ao dividir (3.1) por  $M_{i,t} + M_{j,t}$ , automaticamente garantindo  $\lambda_{i,t+1} \in [0, 1]$ .

2. Se  $M_{i,t} > 0$  e  $M_{j,t} \leq 0$ , assiste-se, no final do instante  $t$ , à entrada de trabalhadores qualificados na região  $i$  e saída da região  $j$ , dependendo  $\lambda_{3,t+1}$  da posição de  $M_{i,t} + M_{j,t}$  relativamente à unidade:

- (a)  $M_{i,t} + M_{j,t} < 1$  ( $M_{3,t} > 0$ ) regista um aumento da atividade industrial na região 3. Em consequência, na determinação de  $\lambda_{i,t+1}$  é imperativo o impacto de  $\omega_{3,t} > \bar{\omega}_t$  e, em particular, a relação entre  $\omega_{i,t}$  e  $\omega_{3,t}$ , nas decisões de migração dos agentes. A solução encontrada por Commendatore *et al.* (2015b) passa, aqui, por dividir (3.1) por  $(1 - M_{j,t}) > 1$ , de onde resulta  $0 \leq M_{i,t}/(1 - M_{j,t}) \leq 1$ ;
- (b)  $M_{i,t} + M_{j,t} \geq 1$  ( $M_{3,t} < 0$ ) é de mais simples intuição, na medida em que a saída de trabalhadores das regiões  $j$  e 3 conduz à aglomeração total da produção industrial em  $i$ , perfazendo  $\lambda_{i,t+1} = 1$ .

Estas combinações determinam uma dinâmica de migração, definida em termos das variáveis  $\lambda_{1,t}$  e  $\lambda_{2,t}$ , que corresponde a uma aplicação bidimensional

$$Z : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Z_1(\lambda_1, \lambda_2), Z_2(\lambda_1, \lambda_2)),$$

dada por

$$\lambda_{i,t+1} = Z_{i,t}(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{i,t} \leq 0 \\ M_{i,t} & \text{se } M_{i,t} > 0, M_{j,t} > 0, M_{i,t} + M_{j,t} < 1 \\ \frac{M_{i,t}}{M_{i,t} + M_{j,t}} & \text{se } M_{i,t} > 0, M_{j,t} > 0, M_{i,t} + M_{j,t} \geq 1 \\ \frac{M_{i,t}}{1 - M_{j,t}} & \text{se } M_{i,t} > 0, M_{j,t} \leq 0, M_{i,t} + M_{j,t} < 1 \\ 1 & \text{se } M_{i,t} > 0, M_{j,t} \leq 0, M_{i,t} + M_{j,t} \geq 1 \end{cases}, \quad (3.5)$$

com  $i, j \in \{1, 2\}$  e  $j \neq i$ .

A equação (3.1) pode ser reescrita, seguindo Commendatore *et al.* (2015b), como

$$M_{1,t} = \lambda_{1,t}[1 + \gamma(K_{1,t} - 1)] \quad M_{2,t} = \lambda_{2,t}[1 + \gamma(K_{2,t} - 1)] \quad (3.6)$$

onde

$$K_{1,t} = \frac{\Delta_{1,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \phi \left( \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} + \frac{s_{3,t}}{\Delta_{3,t}} \right) \right]}{D_t}, \quad K_{2,t} = \frac{\Delta_{2,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} + \phi \left( \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \frac{s_{3,t}}{\Delta_{3,t}} \right) \right]}{D_t},$$

$$\Delta_{1,t} = \lambda_{1,t} + \phi(1 - \lambda_{1,t}), \quad \Delta_{2,t} = \lambda_{2,t} + \phi(1 - \lambda_{2,t}), \quad \Delta_{3,t} = 1 - (\lambda_{1,t} + \lambda_{2,t})(1 - \phi),$$

$$s_{1,t} = \frac{\frac{\sigma - \mu}{3} + \mu\phi\lambda_{1,t} \left( \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} + \frac{1 - s_{2,t}}{\Delta_{3,t}} \right)}{\sigma - \mu\lambda_{1,t} \left( \frac{1}{\Delta_{1,t}} - \frac{\phi}{\Delta_{3,t}} \right)}, \quad s_{2,t} = \frac{\frac{\sigma - \mu}{3} + \mu\phi\lambda_{2,t} \left( \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \frac{1 - s_{1,t}}{\Delta_{3,t}} \right)}{\sigma - \mu\lambda_{2,t} \left( \frac{1}{\Delta_{2,t}} - \frac{\phi}{\Delta_{3,t}} \right)},$$

$$s_{3,t} = 1 - s_{1,t} - s_{2,t},$$

$$D_t = \lambda_{1,t}\Delta_{1,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \phi \left( \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} + \frac{s_{3,t}}{\Delta_{3,t}} \right) \right] + \lambda_{2,t}\Delta_{2,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} + \phi \left( \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \frac{s_{3,t}}{\Delta_{3,t}} \right) \right] \\ + \lambda_{3,t}\Delta_{3,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{3,t}}{\Delta_{3,t}} + \phi \left( \frac{s_{1,t}}{\Delta_{1,t}} + \frac{s_{2,t}}{\Delta_{2,t}} \right) \right].$$

**Lema 3.2.1** (Commendatore *et al.*, 2015b, p. 68). *A função de ajustamento  $Z$  goza das seguintes propriedades:*

1. *Simétrica relativamente ao plano  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , i.e., em relação à linha reta  $L_1 : \{\lambda_1 = \lambda_2\} : Z_1(\lambda_1, \lambda_2) = Z_2(\lambda_2, \lambda_1)$  e  $Z_2(\lambda_1, \lambda_2) = Z_1(\lambda_2, \lambda_1)$ .*
2. *Qualquer conjunto invariante  $A$  de  $Z$  ou é simétrico em relação a  $L_1$ , ou existe outro conjunto invariante simétrico a  $A$  em relação a  $L_1$ .*



A simetria exibida é uma importante propriedade da dinâmica descrita por  $Z$ . Ademais, é instrutivo notar que o modelo completo com três regiões como tem vindo a ser descrito assenta num mais simples: o modelo que contempla apenas duas regiões. Assim que, por imposição de uma das restrições que constam do sistema dinâmico em (3.5), uma das percentagens de atividade industrial seja zero no instante  $t$ , esta permanecerá nula em todas as iterações seguintes (Commendatore e Kubin, 2013). Somente duas das três regiões usufruem, por isso, de setor industrial. Trata-se de uma consequência de se considerar que uma região onde, no período  $t$ , não existe setor industrial não irá atrair, em  $t + 1$ , trabalho qualificado, de onde se declara que:

**Proposição 3.2.1** (Commendatore *et al.*, 2015b, pp. 68 e 71). *São espaços invariantes para a dinâmica descrita por  $Z$  os segmentos de reta*

(a) *correspondentes às medianas do triângulo  $R$ :*

$$L_1 : \{\lambda_1 = \lambda_2\}, \text{ para } 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1/2;$$

$$L_2 : \{\lambda_1 = \lambda_3\} \Leftrightarrow \{\lambda_2 = 1 - 2\lambda_1\}, \text{ para } 0 \leq \lambda_1 \leq 1/2, 0 \leq \lambda_2 \leq 1;$$

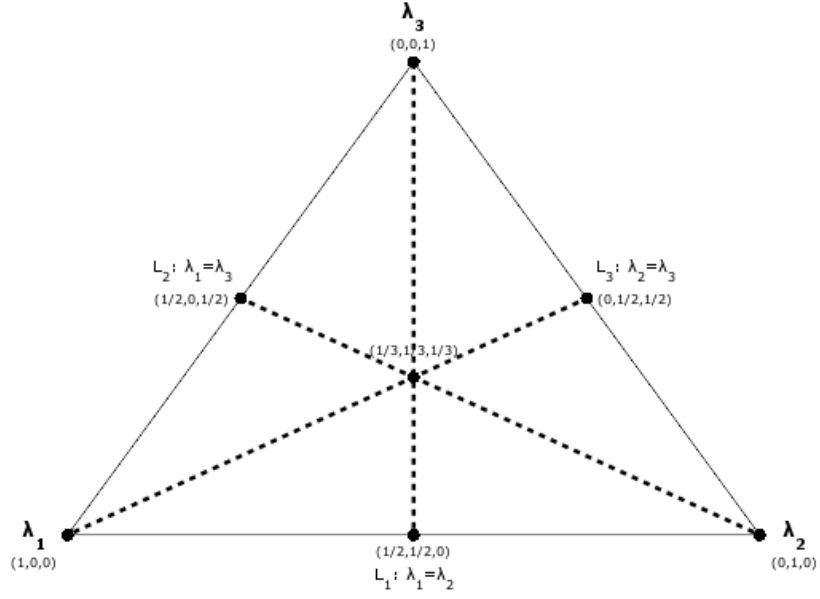
$$L_3 : \{\lambda_2 = \lambda_3\} \Leftrightarrow \{\lambda_2 = \frac{1-\lambda_1}{2}\}, \text{ para } 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1/2.$$

(b) *correspondentes às arestas do triângulo  $R$ :*

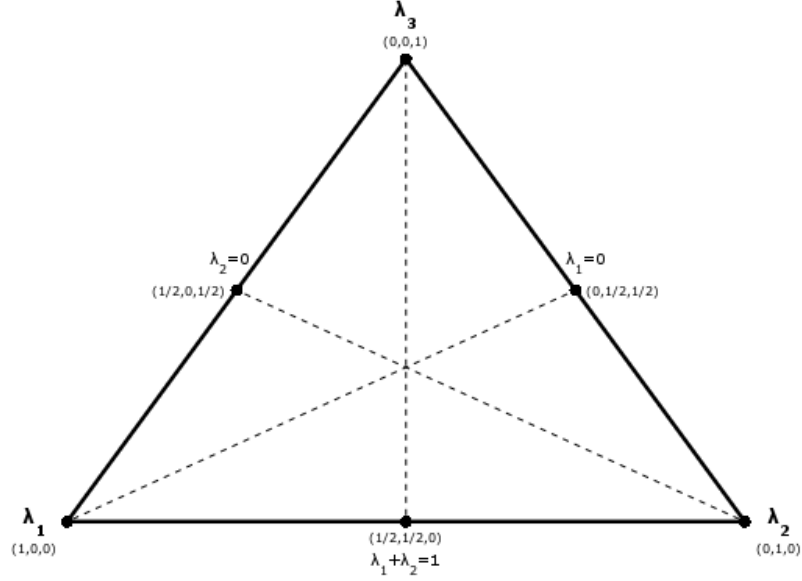
$$\{\lambda_1 = 0\}, \{\lambda_2 = 0\} \text{ e } \{\lambda_1 + \lambda_2 = 1\}, \text{ para } 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1.$$

*Observação 3.2.1.* Atendendo à simetria do problema, para  $\lambda \in [0, 1/2]$ , tem-se  $L_1 : \{\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda\}$ ;  $L_2 : \{\lambda_1 = \lambda_3 \equiv \lambda\}$ ; e  $L_3 : \{\lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda\}$ .

A dificuldade associada à resolução do sistema de equações às diferenças dado por (3.5) abre caminho ao estudo qualitativo, complementado por simulação numérica, da dinâmica de migração imposta por  $Z$ . A determinação dos pontos fixos e análise à sua estabilidade permite descrever o comportamento de longo prazo da solução, i.e., o que acontece conforme  $t \rightarrow \infty$ , ainda que esta não seja exatamente conhecida. As definições a que se recorre na exposição dos conceitos seguintes têm por base Zhang (2006).



(a) Medianas do triângulo  $R$ .



(b) Arestas do triângulo  $R$ .

Figura 3.1: **Espaços invariantes de  $Z$ .**

As linhas a tracejado identificam, em (a), as medianas do triângulo  $R$ , onde duas das regiões exibem uma mesma percentagem de mão-de-obra qualificada  $\lambda$  (*regiões idênticas*). A percentagem de trabalhadores qualificados na terceira região iguala  $1 - 2\lambda$  (*região diferente*). Nas linhas a traço cheio em (b), apenas duas das três regiões usufruem de atividade industrial. Os círculos a preto indicam os pontos fixos que advém da própria configuração do modelo e, portanto, independentes dos parâmetros.

Seja  $z : \lambda \rightarrow z(\lambda)$  a aplicação unidimensional que corresponde à restrição de  $Z$  aos espaços invariantes. A percentagem de trabalho qualificado na região  $i$  em cada instante  $t$  é obtida pela resolução da equação às diferenças  $\lambda_{t+1} = z(\lambda_t)$ . A solução desta equação é uma função  $z : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1]$  que a cada momento de tempo  $t \in \mathbb{N}_0$  associa um estado  $\lambda_t$ . Corresponde, portanto, a uma sequência de estados  $\{\lambda_t\}_{t=0}^\infty$ . A sua determinação num determinado instante do tempo  $t$  requer a resolução do *problema de valor inicial*, exigindo a satisfação, por parte da solução, de certas condições iniciais do tipo  $z_0 = \lambda_0$ . Dada uma condição inicial  $\lambda_0$ , é possível determinar a *trajetória* ou *órbita* deste ponto, i.e., o conjunto de pontos percorridos pela solução da equação às diferenças no espaço de fase que se inicia no ponto de condição inicial  $\lambda_0$ .

**Definição 3.2.1.** Seja  $\lambda_0$  uma condição inicial em  $t = 0$ . A órbita de  $\lambda_0$  por  $z$  é o conjunto de todas as iterações, aplicando sucessivamente a função  $z$  à condição inicial  $\lambda_0$ , ou seja,  $\{\lambda_0, z(\lambda_0), z^2(\lambda_0), z^3(\lambda_0), \dots, z^t(\lambda_0)\}$ .

*Observação 3.2.2.* Uma solução da equação às diferenças  $\lambda_{t+1} = z(\lambda_t)$  é representada pelo gráfico de  $t \mapsto z(\lambda_t)$ , ou seja, é um conjunto de pontos da forma  $(t, z(\lambda_t))$ .

**Definição 3.2.2.** Um estado  $\lambda^*$  é um ponto de equilíbrio ou *steady-state* de  $z$  se não se altera com o tempo, isto é, se é um ponto fixo de  $z(\lambda)$ , verificando  $z(\lambda^*) = \lambda^*$ .

*Observação 3.2.3.* Uma solução que comece num ponto de equilíbrio mantém-se nesse ponto para todos os instantes do tempo considerados, tal que  $z^t(\lambda^*) = \lambda^*, \forall t$ .

**Definição 3.2.3.** Um estado  $\bar{\lambda}$  é um ponto periódico de período  $k$  de  $z$  se  $k$  é o menor número natural que verifica  $z^k(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}$ .

*Observação 3.2.4.* Um ponto de equilíbrio é um ponto periódico de período um. Porém, um ponto periódico de período  $k > 1$  não é um ponto de equilíbrio do sistema.

**Definição 3.2.4.** (a) Um ponto de equilíbrio  $\lambda^*$  diz-se *estável* se trajetórias com início perto (a uma distância menor que  $\delta$ ) não se afastam muito de  $\lambda^*$ , ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(\lambda_0, \lambda^*) < \delta \Rightarrow d(z(t, \lambda_0), \lambda^*) < \varepsilon.$$

- (b) Um ponto de equilíbrio diz-se *localmente assintoticamente estável* ou um *atrator local* se é estável e, quando  $t \rightarrow \infty$ , todas as trajetórias que começam perto se aproximam dele, ou seja,

$$\exists \delta > 0 : d(\lambda_0, \lambda^*) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t, \lambda_0) = \lambda^*.$$

- (c) Um ponto de equilíbrio diz-se *globalmente estável* se as condições (a) e (b) se verificam para todos os pontos do espaço de fase.
- (d) Um ponto de equilíbrio diz-se *instável* ou um *repulsor* se não é estável.

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio e o comportamento local das soluções perto deles é auxiliado pelo Teorema da Estabilidade Local, que estabelece

**Teorema 3.2.1** (Teorema da Estabilidade Local). *Seja  $Z$  uma função diferenciável e o estado  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  um ponto fixo do sistema (3.5). Então,*

1. *O ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável se os valores próprios da matriz jacobiana de  $Z$  em  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  se encontram dentro do círculo unitário.*
2. *O ponto de equilíbrio é instável se pelo menos um dos valores próprios se encontra fora do círculo unitário.*
3. *O Teorema da Estabilidade Local nada permite concluir caso a matriz jacobiana de  $Z$  em  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  tenha valores próprios de norma 1. Nesse caso, o ponto de equilíbrio diz-se não hiperbólico.*

**Observação 3.2.5.** Seja  $\lambda^*$  um ponto de equilíbrio de  $\lambda_{t+1} = z(\lambda_t)$ . Averiguar a sua estabilidade é equivalente a saber se  $|z'(\lambda^*)| < 1$ . Assim,

1. O estado  $\lambda^*$  é *localmente assintoticamente estável* se  $z'(\lambda^*) \in ]-1, 1[$ .
  - (a) A convergência para o equilíbrio é *monótona* se  $0 \leq z'(\lambda^*) < 1$ ;

- (b) A convergência para o equilíbrio é *oscilatória* se  $-1 < z'(\lambda^*) < 0$ .
- 2. O estado  $\lambda^*$  é *instável* se  $z'(\lambda^*) \notin ]-1, 1[$ .
  - (a) A divergência face ao equilíbrio é *monótona* se  $z'(\lambda^*) > 1$ ;
  - (b) A divergência face ao equilíbrio é *oscilatória* se  $z'(\lambda^*) < -1$ .

Encontrando-nos num dos espaços invariantes, as variáveis que concorrem para a determinação de (3.6) passam a depender unicamente de  $\lambda_t$ , tal concedendo a possibilidade de ilustrar o funcionamento geral do modelo em função dos parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  e, em particular,  $\phi$ , por meio da sua representação gráfica.

### 3.3 Duas regiões idênticas

Seja  $\lambda_i = \lambda_k \equiv \lambda$  a percentagem de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas  $i$  e  $k$ . A percentagem de trabalhadores qualificados na região  $j$  é obtida pela diferença  $1 - \lambda_i - \lambda_k \equiv 1 - 2\lambda$ . Atendendo à simetria apresentada, podemos retirar conclusões que se estendem, por permutação das regiões, a qualquer uma das medianas do triângulo  $R$ . Comece por reescrever-se  $\Delta_{i,t}$  e  $\Delta_{j,t}$  como

$$\Delta_{i,t} = \lambda_t + \phi(1 - \lambda_t), \quad \Delta_{j,t} = 1 - 2\lambda_t(1 - \phi). \quad (3.7)$$

A Figura 3.2 representa graficamente (3.7) para diferentes valores de  $\phi$ , tomando por referência<sup>3</sup>  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ . Sendo  $\phi$  positivo e inferior à unidade, a reta  $\Delta_i$  tem declive positivo, pelo que incrementos na percentagem de trabalhadores qualificados na região  $i$  conduzem a um aumento do nível de  $\Delta_i$ , o mesmo sendo verdade para  $k$ . Sabe-se também que, para um dado  $\lambda$ ,  $\Delta_i$  é tanto maior quanto maior  $\phi$ . Se entendida como a apreciação que é feita por um produtor ativo na região  $i$  aos mercados doméstico

---

<sup>3</sup>Estes valores dos parâmetros são frequentemente referidos por Commendatore *et al.* (2015b) na exposição de representações gráficas.

e exterior, podemos concluir que o último é favorecido pela integração dos mercados, na medida em que a diminuição dos preços a que os consumidores residentes em  $j$  têm acesso a uma variedade produzida em  $i$  incentiva, para um determinado nível de rendimento, a compra em maior quantidade, beneficiando o excedente do exportador. Por sua vez,  $\Delta_j$  é negativamente inclinada, porém relaciona-se positivamente com  $\phi$ . Então, aumentos da mão-de-obra qualificada nas regiões idênticas, assumindo  $\phi$  constante, causam uma redução no seu nível. Não obstante, para um dado  $\lambda$ , quanto maior  $\phi$ , maior o potencial que um produtor ativo na região  $j$  atribui ao mercado das regiões idênticas. É fácil verificar que na ausência de trabalho qualificado nas regiões idênticas ( $\lambda = 0$ ), havendo aglomeração total da indústria na região diferente  $j$ ,  $\Delta_j = 1$ . Neste caso, um produtor da região  $j$  vê nas regiões idênticas um mercado a explorar, por nelas não enfrentar qualquer concorrência de outros produtores. Já quando a indústria se reparte equitativamente entre as regiões idênticas ( $\lambda = 1/2$ ),  $\Delta_i$  assume o seu valor máximo, enquanto  $\Delta_j$  é mínimo e nulo.

A percentagem de despesa total que é efetuada na região  $i$  é igual à percentagem de despesa total que é efetuada na região  $k$  ( $s_{i,t} = s_{k,t}$ ), sendo ambas dadas por

$$s_{i,t} = \frac{\frac{\sigma - \mu}{3} + \frac{\mu\phi\lambda_t}{\Delta_{j,t}}}{\frac{2\mu\phi\lambda_t}{\Delta_{j,t}} + \sigma - \frac{\mu(1 + \phi)\lambda_t}{\Delta_{i,t}}}. \quad (3.8)$$

Assim, tem-se

$$s_{j,t} = 1 - 2s_{i,t}.$$

**Proposição 3.3.1.** *Sendo as regiões uniformemente dotadas de trabalhadores agrícolas, imóveis entre elas, e estando os trabalhadores qualificados igualmente distribuídos ao longo do espaço ( $\lambda = 1/3$ ), cada região contribui para uma terça parte da despesa total que é realizada na economia, isto é,  $s_i(1/3) = 1/3$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ , com  $\phi \in (0, 1]$ .*

*Demonstração.* Por substituição direta em  $s_{i,t}(\lambda_t)$ , mediante (3.8). □

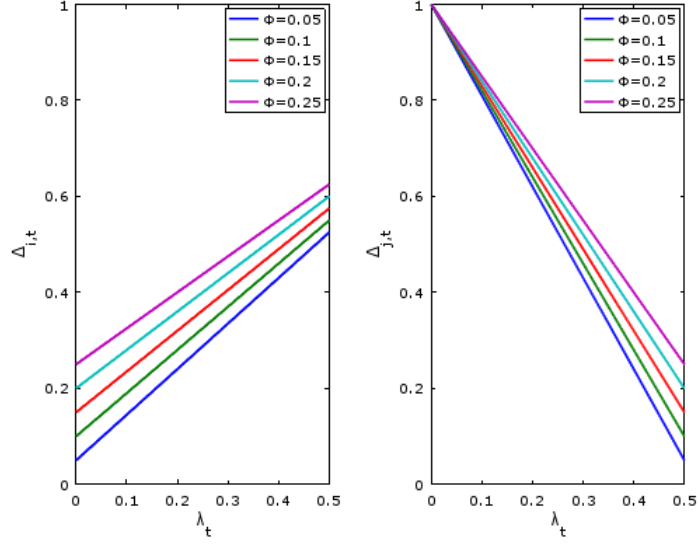


Figura 3.2: **Representação gráfica de  $\Delta_{i,t}$  e  $\Delta_{j,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra à esquerda (direita) a variável  $\Delta_{i,t}$  ( $\Delta_{j,t}$ ), dada por (3.7). Salienta-se que a exportação é incentivada pela tendência de redução progressiva de  $T$ , conducente a uma maior integração económica entre os três mercados.

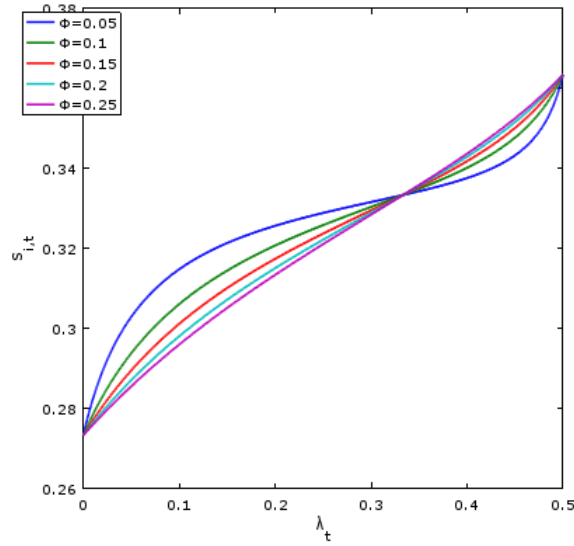


Figura 3.3: **Representação gráfica de  $s_{i,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra, de acordo com (3.8), a evolução da quota-parte da despesa total que é realizada na região  $i$ , correspondendo a um terço de  $Y_t$  quando a mão-de-obra qualificada se encontra uniformemente distribuída entre as regiões. Destaca-se a aproximação a uma função linear da função  $s_{i,t}$  perante o fenómeno de liberalização comercial.

No intervalo de  $\lambda$  considerado,  $s_{i,t}$ , dada por (3.8), apresenta duas fases de crescimento distintas: é *côncava* para  $\lambda \in [0, 1/3]$  e *convexa* no intervalo remanescente. Observe-se a Figura 3.3. Para valores de  $\lambda$  inferiores a  $1/3$ , a fração da despesa total realizada na região é, portanto, crescente com a mão-de-obra qualificada, mas a ritmos cada vez menores, ao passo que, para valores tendentes a  $1/2$ , a despesa aumenta a taxas crescentes. Ou seja, quando as regiões idênticas concentram um menor número de trabalhadores qualificados, os efeitos de aglomeração são menos intensos do que quando duas das regiões têm maior população do que uma terceira. Conclui-se, então, que é diferente ter-se uma economia composta por duas regiões (iguais) grandes e uma pequena ou terem-se duas regiões (iguais) pequenas e uma grande. Note-se, ainda, que a redução progressiva dos custos de transporte (aumento de  $\phi$ ) desacentua a curva da função  $s$ , aproximando-a de uma reta. A tendência de liberalização comercial conduz, por isso, a aumentos na despesa menos variáveis, logo, mais previsíveis.

A despesa que é realizada na região está intimamente ligada ao rendimento que nela é obtido e, por conseguinte, ao poder de compra dos consumidores que nela residem. O salário médio real  $\bar{\omega}_t$  resulta da ponderação do salário real oferecido em cada uma das regiões pela percentagem de trabalhadores qualificados existente em cada uma delas no instante  $t$ , isto é,

$$\bar{\omega}_t = \sum_{j=1}^3 (\lambda_{j,t} \omega_{j,t}).$$

No caso de duas regiões idênticas, o salário real  $\bar{\omega}_t$  tal como definido acima emana da soma de duas parcelas: a primeira corresponde ao salário real nas regiões idênticas  $i$  e  $k$ , com  $\omega_{i,t} = \omega_{k,t}$ ; e a segunda ao salário real na região diferente  $j$ ,  $\omega_{j,t}$ . Assim sendo, esta medida de utilidade indireta vem dada por

$$\bar{\omega}_t = 2\lambda_t \omega_{i,t} + (1 - 2\lambda_t) \omega_{j,t},$$

pelo que se tem



$$D_t = 2\lambda_t \Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}(1+\phi)}{\Delta_{i,t}} + \frac{\phi(1-2s_{i,t})}{\Delta_{j,t}} \right] + (1-2\lambda_t) \Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{1-2s_{i,t}}{\Delta_{j,t}} + \frac{2\phi s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right]. \quad (3.9)$$

Para um dado valor de  $\phi$ , a Figura 3.4 mostra que a entrada de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas, quando estas têm uma menor dimensão por comparação à região diferente ( $\lambda < 1/3$ ), provoca um contínuo decréscimo do salário médio real, apenas interrompido quando se atinge  $\lambda = 1/3$ . Pelo contrário, quando o mercado das regiões idênticas tem já uma dimensão superior ( $\lambda > 1/3$ ), a tendência é de aumento de  $\bar{w}$ . Independentemente do grau de liberdade comercial, a remuneração média é: mínima quando a atividade industrial se dissemina equivalentemente entre as três regiões; máxima com a concentração total do setor industrial na região desigual ( $\lambda = 0$ ). Mais se observa que o aumento de  $\phi$ , para um dado  $\lambda$ , causa um aumento de nível do salário médio. Desde logo espera-se que a maior integração dos mercados propicie aos consumidores um poder de compra superior, que se repercute proficuamente sobre o bem-estar social.

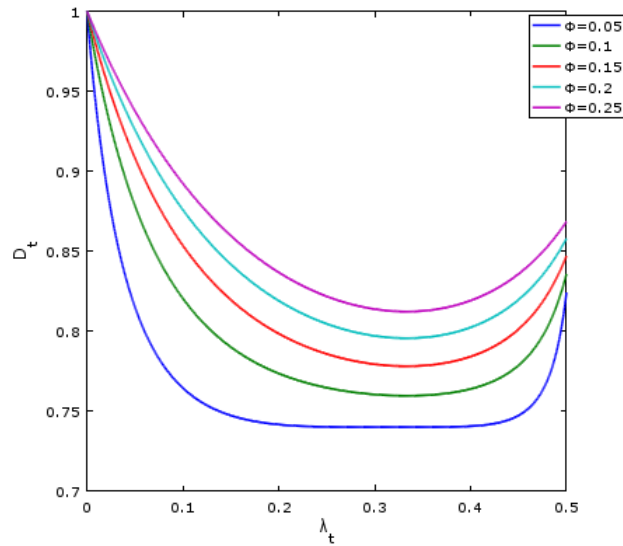


Figura 3.4: **Representação gráfica de  $D_t$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra a evolução do salário médio real  $\bar{w}_t$ , dado por (3.9). A remuneração média é: crescente com a integração económica; *mínima* na dispersão simétrica do setor industrial entre as três regiões; *máxima* na configuração centro-periferia.

Sejam  $K_{i,t}$  ( $= K_{k,t}$ ) e  $K_{j,t}$  os rácios, respetivamente, entre o s l rio real auferido na região  $i, j$  e o s l rio médio da economia, dados por

$$K_{i,t} = \frac{\omega_{i,t}}{\bar{\omega}_t} = \frac{\Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}(1+\phi)}{\Delta_{i,t}} + \frac{\phi(1-2s_{i,t})}{\Delta_{j,t}} \right]}{D_t}, \quad (3.10)$$

$$K_{j,t} = \frac{\omega_{j,t}}{\bar{\omega}_t} = \frac{\Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{1-2s_{i,t}}{\Delta_{j,t}} + \frac{2\phi s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right]}{D_t}. \quad (3.11)$$

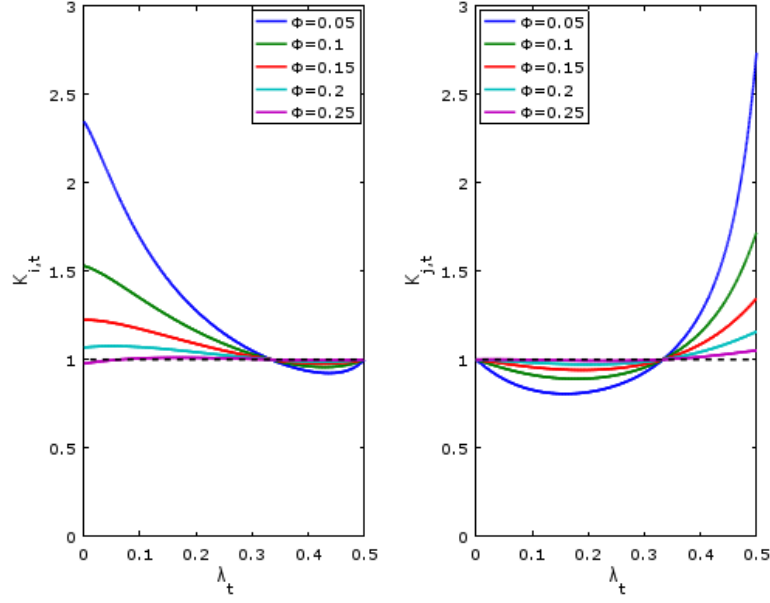
Um valor de  $K_i < 1$  ( $\omega_i < \bar{\omega}$ ) traduz uma situação em que um trabalhador qualificado residente na região  $i$  tem, de acordo com a dinâmica imposta em (3.1), incentivo em sair da região. Ao invés,  $K_i > 1$  ( $\omega_i > \bar{\omega}$ ) sugere a oferta de um bem-estar superior na região  $i$ , atraindo a instalação de novas empresas no local.<sup>4</sup>

A Figura 3.5 desenha as funções  $K_{i,t}$  e  $K_{j,t}$  para valores selecionados de  $\phi$  considerados *reduzidos*. Dela se infere o incitamento à entrada de novas empresas nas regiões idênticas enquanto  $\lambda < 1/3$ , i.e., enquanto as regiões  $i, k$  abrigam uma percentagem de população qualificada inferior àquela que reside em  $j$ . Para  $\lambda > 1/3$ , o rácio  $K_j > 1$ , pelo que a região diferente em termos populacionais oferece uma maior utilidade indireta do que as restantes, onde a remuneração se iguala. Quer isto dizer que o crescimento do número de empresas nas regiões idênticas incentiva a deslocalização da indústria para a região diferente, um fen meno justificado pelo efeito negativo da intensificação da concorrência sobre os lucros dos produtores locais. Note-se ainda que  $K_i = K_j = K_k = 1$  quando  $\lambda = 1/3$ . Então, quando a população qualificada se encontra repartida equitativamente entre as três regiões, d -se uma equalização dos vencimentos em termos reais. Neste ponto não se verificam, em consequência, incentivos à mobilidade entre regiões, característica que atribui a esta distribuição demográfica a condição de *steady-state*.

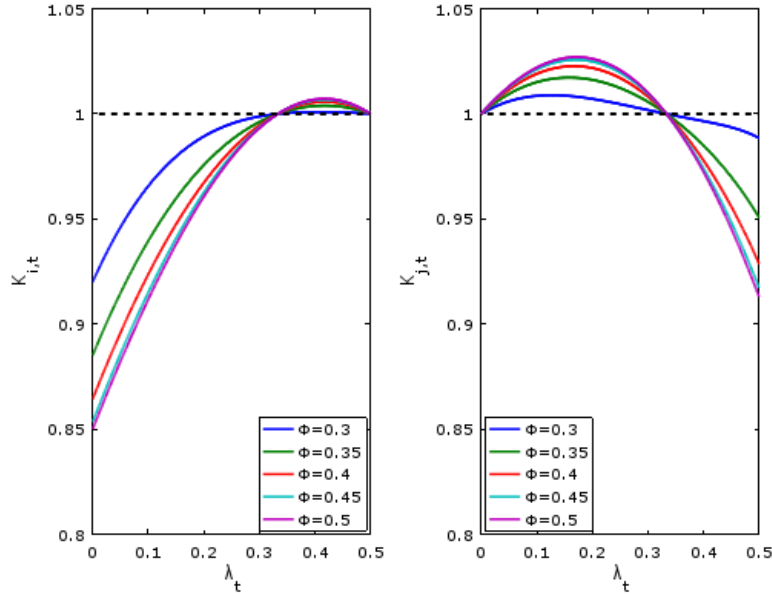
Recorde-se que montantes crescentes de  $\phi$  expressam a redução progressiva dos custos de transporte  $T$  dos bens industriais entre regiões, tornando pouco relevante o local onde estes são produzidos e, por isso, atuam como uma força de aglomeração.

---

<sup>4</sup>O mesmo tipo de interpretação é feita relativamente à região  $k$ .



(a)  $0.05 \leq \phi \leq 0.25$



(b)  $0.3 \leq \phi \leq 0.5$

Figura 3.5: **Representação gráfica de  $K_{i,t}$  e  $K_{j,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra, à esquerda, o rácio entre o salário real auferido por um trabalhador residente em  $i$  e a remuneração média da economia, tendo em conta (3.10). A linha a tracejado preto iguala a unidade, representando, para valores acima (abaixo) dela, o incentivo em permanecer (sair) na região, dado que  $\omega_{i,t}$  é superior (inferior) a  $\bar{\omega}_t$ . À direita tem-se o mesmo rácio mas em relação à região diferente  $j$ , este dado por (3.11).

Desde logo, antecipa-se que a estabilidade desta configuração no longo prazo será, por essa razão, influenciada pelo valor tomado por  $\phi$ , pelo que se considera pertinente ilustrar, em (b), as mesmas variáveis, todavia para uma seleção de valores deste parâmetro *superiores* aos que constam de (a). Desta feita,  $K_i$  é inferior à unidade para  $\lambda < 1/3$ . Assim sendo, a saída de mão-de-obra qualificada ativa nas regiões idênticas leva à concentração do setor industrial na região diferente  $j$ . À direita de  $1/3$ , o rácio  $K_i$  supera a unidade, motivando a instalação de novas empresas nas regiões idênticas. No limite, testemunha-se a repartição da mão-de-obra qualificada, em frações afins, entre as regiões  $i, k$ , desindustrializando  $j$ .

Ainda atentos à Figura 3.5, depreende-se a igualdade  $K_i = K_k = 1$ , com  $K_j \neq 1$ , para  $\lambda = 1/2$  e  $K_j = 1$ , com  $K_i = K_k \neq 1$  para  $\lambda = 0$ . Estes estados, em discordância do sucedido para  $\lambda = 1/3$ , não manifestam uma equalização dos salários reais na economia, antes derivam da simetria entre as regiões idênticas. Assim, quando  $\lambda = 1/2$ , a percentagem de trabalhadores qualificados em  $j$  é nula e, como resultado,  $\bar{\omega} = \omega_i = \omega_k$ . Para  $\lambda = 0$ , apenas conta para o salário médio real a remuneração auferida em  $j$ , pelo que  $\bar{\omega} = \omega_j$ . Em face da construção de (3.10)-(3.11) é possível definir

$$\omega_{i,t} = \Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}(1+\phi)}{\Delta_{i,t}} + \frac{\phi(1-2s_{i,t})}{\Delta_{j,t}} \right], \quad (3.12)$$

$$\omega_{j,t} = \Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{1-2s_{i,t}}{\Delta_{j,t}} + \frac{2\phi s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right]. \quad (3.13)$$

A despeito de não ser uma variável usada por Commendatore *et al.* (2015b) na sua versão do modelo, o rácio entre os salários reais das regiões,  $R$ , fornece uma comparação imediata entre o bem-estar nelas oferecido, afigurando-se útil a sua representação gráfica. Atendendo à simetria entre as regiões,  $R_{ij,t} = R_{kj,t} \equiv R(\lambda_t)$  pode, fazendo uso das equações em (3.12)-(3.13), ser escrito como o quociente entre  $\omega_{i,t}$  e  $\omega_{j,t}$ ,

$$R(\lambda_t) = \frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}} = \frac{\Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}(1+\phi)}{\Delta_{i,t}} + \frac{\phi(1-2s_{i,t})}{\Delta_{j,t}} \right]}{\Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{1-2s_{i,t}}{\Delta_{j,t}} + \frac{2\phi s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right]}, \quad (3.14)$$

permitindo a representação que consta da Figura 3.6.

Sabe-se que quando a atividade económica industrial se reparte de modo idêntico entre as três regiões, os salários oferecidos em cada uma delas igualam-se. Assim sendo, é de fácil constatação que, independentemente do grau de liberdade comercial,  $R(1/3) = 1$ .

Relativamente à influência de  $\phi$  em  $R(\lambda)$ , verifica-se, na Figura 3.6a, que para valores *suficientemente reduzidos* de  $\phi$ , se  $\lambda \in [0, 1/3[$  o salário real que vigora nas regiões idênticas  $i, k$  supera  $\omega_j$  e, portanto,  $R(\lambda) > 1$ . Como tal, quando nas regiões idênticas operam menos produtores do que na região diferente, os custos de transporte elevados, característicos de um processo de integração económica ainda numa fase inicial, aliados à menor concorrência sentida, induzem a oferta de um maior salário real, o que levará à saída de trabalhadores qualificados da região  $j$ . Esta oferta de uma maior utilidade indireta reflete-se, por um lado, no maior poder de compra dos consumidores, com uma parte do seu rendimento a ser gasta localmente. A maior procura aumenta, em consequência, os lucros dos produtores locais e o rendimento nominal da região (*market size effect*). Por outro lado, a instalação de novas empresas nas regiões idênticas, atraídas pelo bem-estar superior, proporciona aos consumidores novas variedades locais que, por não serem alvo de importação, estão disponíveis a um preço mais reduzido. O menor índice de preços reforça o incentivo à deslocação de trabalhadores qualificados para as regiões idênticas  $i, k$  (*cost-of-living effect*). Estas ligações atuam no sentido da aglomeração, contrariando o efeito concorrência, que promove a dispersão da indústria. Para  $\phi$  suficientemente reduzido, espera-se que o último dos efeitos seja mais forte e reponha a igualdade salarial no longo prazo, o que ocorre para  $\lambda = 1/3$ . De facto, se  $\lambda \in ]1/3, 1/2]$ , o rácio salarial  $R(\lambda)$  é inferior à unidade, promovendo a saída de trabalhadores qualificados da região  $i$  com destino a  $j$ , por ser  $\omega_j > \omega_i$ . Isto posto, antecipa-se a estabilidade da configuração de dispersão simétrica  $\lambda = 1/3$ .

Em oposição, para valores de  $\phi$  *suficientemente elevados*, sucede o contrário: se  $\lambda \in [0, 1/3[$ , tem-se  $R(\lambda) < 1$ ; se  $\lambda \in ]1/3, 1/2]$ , então  $R(\lambda) > 1$  (Figura 3.6b). No primeiro caso, a saída de trabalhadores das regiões  $i, k$  aglomera a indústria na região  $j$ . No segundo, a atividade industrial reparte-se equitativamente entre as regiões idênticas.

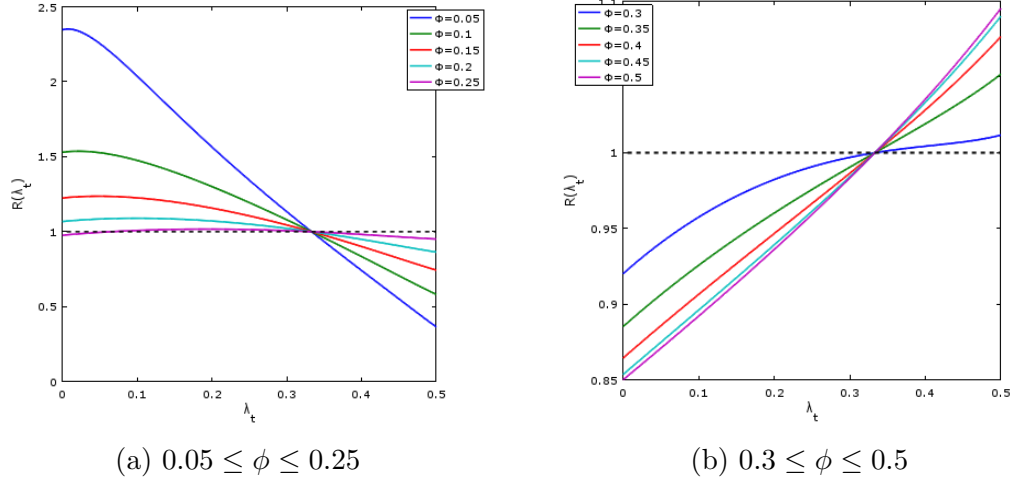


Figura 3.6: **Representação gráfica do rácio  $R(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o rácio entre o salário real das regiões idênticas e o salário real da região diferente, dado por (3.14). A linha a tracejado preto separa, acima, as percentagens de trabalho qualificado  $\lambda$  para as quais, dado  $\phi$ ,  $\omega_i > \omega_j$ . Abaixo desta linha, é maior o bem-estar oferecido na região diferente por comparação às regiões idênticas.

A estabilidade dos equilíbrios será, portanto, afetada pelas considerações feitas ao longo desta secção e pelo valor do parâmetro  $\phi$  considerado. Dessarte, espera-se que para estágios cada vez mais desenvolvidos do processo de integração económica se imponha a tendência de aglomeração, contrariando a inicial dispersão da atividade industrial.

### 3.3.1 Dinâmica nas medianas do triângulo $R$

A restrição do sistema de equações às diferenças dado por (3.5) a cada uma das medianas do triângulo  $R$  concede que a dinâmica de migração seja descrita por uma aplicação unidimensional  $z_d : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1/2]$ , definida como

$$z_d : \lambda_t \rightarrow z_d(\lambda_t) = \begin{cases} 0 & \text{se } M(\lambda_t) \leq 0, \\ M(\lambda_t) & \text{se } 0 < M(\lambda_t) < 1/2, \\ \frac{1}{2} & \text{se } M(\lambda_t) \geq 1/2. \end{cases} \quad (3.15)$$

A equação central em (3.15) é determinada por (3.7)-(3.11), de onde vem

$$M(\lambda_t) = \lambda_t[1 + \gamma(K(\lambda_t) - 1)]. \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade

De acordo com a Definição 3.2.2, um estado  $\lambda^* \in [0, 1/2]$  é um ponto de equilíbrio ou *steady-state* do sistema (3.15) se não se altera com o tempo, isto é, se é um ponto fixo de  $z_d(\lambda)$ , verificando  $z_d(\lambda^*) = \lambda^*$ . Tratando-se  $z_d(\lambda_t)$  de uma função composta por ramos, a determinação dos pontos fixos do sistema (3.15) impõe a análise, caso a caso, da dinâmica por cada um deles instituída. São, portanto, três os casos que se apresentam de seguida.

*Caso 1.*  $M(\lambda_t) < 0, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$z_d(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = 0.$$

Em termos do sistema (3.5), tal significa a existência dos pontos fixos:

$$CP_1 : (1, 0, 0), \quad CP_2 : (0, 1, 0), \quad CP_3 : (0, 0, 1).$$

Cada ponto  $CP_i$  corresponde a um vértice do triângulo  $R$  e é designado de equilíbrio centro-periferia. Se uma órbita converge para um destes pontos, assiste-se à concentração do setor industrial numa única região (1, 2 ou 3).

*Caso 2.*  $M(\lambda_t) > 1/2, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$z_d(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = \frac{1}{2}$$

Em termos do sistema (3.5), tal significa a existência dos pontos fixos:

$$S_1 : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad S_2 : \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad S_3 : \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Cada ponto  $S_i$  corresponde a um extremo das medianas do triângulo  $R$  e é designado de equilíbrio de aglomeração parcial ou equilíbrio de simetria entre duas regiões. Se uma órbita converge para um destes pontos, assiste-se à repartição da atividade económica industrial de forma equitativa entre duas das três regiões (1 e 2; 1 e 3; ou 2 e 3), ficando a terceira despovoada no que à mão-de-obra qualificada concerne.

*Caso 3.*  $0 \leq M(\lambda_t) \leq 1/2, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
z_d(\lambda^*) = \lambda^* &\Leftrightarrow M(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda[1 + \gamma(K(\lambda^*) - 1)] = \lambda \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda[\gamma(K(\lambda^*) - 1)] = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \gamma(K(\lambda^*) - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
&\stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \lambda^* = 0 \vee K(\lambda^*) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1/2] : \omega_{i,t} = \bar{\omega}_t\},
\end{aligned}$$

o que, no caso de simetria entre as regiões  $i, k$  equivale a

$$\begin{aligned}
\omega_{i,t} &= 2\lambda^*\omega_{i,t} + (1 - 2\lambda^*)\omega_{j,t} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega_{i,t}(1 - 2\lambda^*) = (1 - 2\lambda^*)\omega_{j,t} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega_{i,t} = \omega_{j,t},
\end{aligned}$$

traduzindo uma igualdade entre o salário real das três regiões. Sabe-se de antemão que, pela configuração do modelo, esta igualdade ocorre para  $\lambda^* = 1/3$ . Em termos do sistema (3.5) este ponto fixo corresponde a

$$S_s : \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$



Esta configuração designa-se por equilíbrio de dispersão simétrica. É um ponto fixo *interior*, por se encontrar dentro do triângulo  $R$ , correspondendo à interseção das suas medianas, e *simétrico*, na medida em que as três regiões possuem a mesma percentagem de trabalho qualificado.

Adicionalmente, para certos valores dos parâmetros, é possível encontrar em  $L_i$  pontos fixos interiores assimétricos,  $A_i$  e  $A'_i$ , onde duas regiões exibem uma mesma percentagem de atividade industrial, por serem iguais as remunerações que oferecem, e uma terceira ostenta uma percentagem diferente:

$$\begin{aligned} A_1 : (\lambda_d, \lambda_d, 1 - 2\lambda_d), & \quad A'_1 : (\lambda'_d, \lambda'_d, 1 - 2\lambda'_d); \\ A_2 : (\lambda_d, 1 - 2\lambda_d, \lambda_d), & \quad A'_2 : (\lambda'_d, 1 - 2\lambda'_d, \lambda'_d); \\ A_3 : (1 - 2\lambda_d, \lambda_d, \lambda_d), & \quad A'_3 : (1 - 2\lambda'_d, \lambda'_d, \lambda'_d). \end{aligned}$$

*Observação 3.3.1.* Os equilíbrios centro-periferia  $CP_i$ , aglomeração parcial  $S_i$  e dispersão simétrica  $S_s$ , diferentemente dos pontos fixos  $A_i$  e  $A'_i$ , ocorrem sempre neste modelo, gozando de independência face aos parâmetros considerados.<sup>5</sup>

A restrição do modelo aos espaços invariantes converte o sistema de equações às diferenças  $\lambda_{i,t+1} = Z_i(\lambda_{i,t}, \lambda_{j,t})$ , dado por (3.5) e dependente de duas variáveis de estado<sup>6</sup>, em  $\lambda_{t+1} = z_d(\lambda_t)$ , dado por (3.15) e dependente de uma única. Esta restrição possibilita a representação gráfica da solução de (3.15) recorrendo ao método geométrico, onde o eixo das abcissas corresponde a  $\lambda_t$  e o eixo das ordenadas a  $\lambda_{t+1}$ . Desenhando a reta bissetriz dos quadrantes ímpares e a função  $z_d(\lambda_t)$ , que descreve a equação às diferenças, a interseção entre as duas curvas identifica um ponto fixo. Para uma condição inicial suficientemente próxima de um ponto de equilíbrio  $\lambda^*$  é possível determinar a trajetória correspondente, projetada no eixo horizontal, o que permite aferir da convergência ou divergência face a  $\lambda^*$ . A Figura 3.7 esboça esta representação, também designada por

---

<sup>5</sup>Para as condições de estabilidade, derivadas analiticamente, destes equilíbrios recomenda-se a leitura de Commendatore e Kubin (2013).

<sup>6</sup>Com a terceira a ser obtida residualmente a partir das outras duas.

*diagrama de fase*. Distingue-se das Figuras 3.8 e 3.9 por nela não constarem informações relativamente ao momento do tempo em que os pontos são atingidos.

As conclusões que de seguida se apresentam reportam à observação das Figuras 3.7, 3.8 e 3.9. Desta feita, as informações retiradas complementam-se no sentido de avaliar qualitativamente o comportamento das soluções. Dados os valores dos parâmetros

- (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ , considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido* para fazer valer as forças de dispersão;  $\phi = 0.35$  como *suficientemente elevado* para relevar as forças de aglomeração sobre as restantes; e  $\phi = 0.1$  como *muito reduzido* para exhibir o comportamento caótico das soluções de (3.15).

Conclui-se que

- para  $\phi$  *muito reduzido*, quer a trajetória se inicie numa condição inicial à esquerda do equilíbrio de dispersão simétrica, quer à sua direita, verifica-se um comportamento caótico da solução de (3.15), perceptível nas Figuras 3.8a e 3.9a, que em termos económicos se traduz na movimentação incessante e desorganizada de trabalhadores entre as regiões, não havendo convergência para qualquer equilíbrio por muito que se estenda o horizonte temporal.
- para  $\phi$  *suficientemente reduzido* e uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , denota-se convergência para o equilíbrio de dispersão simétrica. Ante  $0 < z'_d(1/3) < 1$ , a aproximação é monótona, assistindo-se à entrada de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas até se atingir  $\lambda^* = 1/3$ . A convergência para este ponto fixo, dada uma condição inicial à sua direita, processa-se pela saída de trabalhadores qualificados das regiões idênticas com destino à região diferente, fenómeno que se observa na Figura 3.8b. Por conseguinte, o equilíbrio de aglomeração parcial é *instável*.

Note-se que, para este valor de  $\phi$ , a função admite um ponto fixo interior assimétrico:  $\lambda^* = \lambda_d < 1/3$ . Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]\lambda_d, 1/3[$ , atente-se na Figura 3.9a. Dela se infere que, dada a aproximação a  $\lambda^* = 1/3$ , existe

um afastamento monótono face ao equilíbrio assimétrico  $\lambda_d$ . Tal é suficiente para afirmar que este ponto fixo é *instável*, conclusão que se corrobora por ser  $z'_d(\lambda_d) > 1$ , como se depreende pela observação da Figura 3.7.

No que concerne à configuração centro-periferia, onde  $\lambda^* = 0$ , pela Figura 3.7a observa-se que uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, \lambda_d[$  irá divergir monotona-mente deste equilíbrio, aproximando-se de  $\lambda_d$ . Pontos fixos do tipo  $CP_i$  são, por isso, *instáveis*. Assim sendo,  $\lambda^* = 1/3$  é *globalmente estável* por ser um atrator para todo  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ .

- para  $\phi$  *suficientemente elevado* e uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , afigura-se um afastamento do equilíbrio de dispersão simétrica. Perante  $z'_d(1/3) > 1$ , a divergência é monótona, assistindo-se à saída de trabalhadores qualificados das regiões idênticas até que, para  $t > 10$ , se atinge o equilíbrio  $\lambda^* = 0$  e aí se permanece indeterminadamente (Figura 3.8a). Quer isto dizer que as regiões idênticas ficam, no longo prazo, despovoadas no que respeita a mão-de-obra qualificada, concentrando-se esta, por inteiro, na região diferente. Para uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$ , a dinâmica converge monotona-mente para  $\lambda^* = 1/2$ , presenciando-se um aumento da mão-de-obra qualificada nas regiões idênticas até que metade se instale em cada uma delas, ficando, agora, a região diferente despovoadas desta força de trabalho (Figura 3.9a). Assim, os equilíbrios centro-periferia e aglomeração parcial são, neste caso, *localmente assintoticamente estáveis*, enquanto a dispersão simétrica passa a *instável*.

- (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 1.8$  e  $\gamma = 20$ , considerou-se:  $\phi = 0.15$  como *muito reduzido*;  $\phi = 0.21$  como *suficientemente reduzido*; e  $\phi = 0.35$  como *suficientemente elevado*.

Observa-se que

- para  $\phi$  *muito reduzido* e uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , observa-se uma órbita periódica de período 2. Tal significa que a percentagem de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas oscila entre dois valores, igualando-se

de dois em dois períodos, tal que  $\lambda_{t+2} = \lambda_t$ . Não há, conseqüentemente, convergência para qualquer ponto fixo, independentemente do tempo  $t$  que se considere (Figuras 3.8b e 3.9b). Em termos de realidade empírica, esta situação traduzir-se-ia numa movimentação incessante de trabalhadores qualificados que, em termos percentuais, se deslocam, no instante  $t$ , das regiões  $i, k$  para  $j$  e que, no instante seguinte, regressam à região de origem.

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*,  $0 < z'_d(1/3) < 1$ , pelo que  $\lambda^* = 1/3$  é *localmente assintoticamente estável*, sendo a aproximação ao ponto monótona, como de resto se observa nas Figuras 3.8b e 3.9b. Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , a convergência é feita pela entrada de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas, ao passo que  $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$  determina a saída de empresas das regiões  $i, k$ . O equilíbrio de aglomeração parcial é, portanto, *instável*. Observa-se também, na Figura 3.7, a existência de um ponto fixo interior assimétrico  $\lambda^* = \lambda_d$ . O facto de uma determinada condição inicial  $\lambda_0 \in ]\lambda_d, 1/3[$  convergir para  $\lambda^* = 1/3$  é suficiente para concluir que é *instável* o equilíbrio de dispersão assimétrica. Não obstante, pela Figura 3.7 depreende-se que  $z'_d(\lambda_d) > 1$ , corroborando as conclusões já referidas. Assim, é possível afirmar que é *localmente assintoticamente estável*  $\lambda^* = 0$ .
- para  $\phi$  *suficientemente elevado* as conclusões que se retiram relativamente à estabilidade dos três tipos de *steady-states* são em tudo semelhantes à alínea (a): instabilidade do equilíbrio de dispersão simétrica  $S_i$  e estabilidade dos equilíbrios centro-periferia  $CP_i$  e aglomeração parcial  $S_i$ . Note-se, todavia, que a convergência se processa em (b) mais rapidamente do que em (a), isto porque se assume um valor da velocidade de migração  $\gamma$  superior.

Destaque ainda para as restrições, claramente perceptíveis, do sistema (3.15), impondo, para os parâmetros considerados,  $z_d = 0$  na proximidade de  $\lambda^* = 0$  e  $z_d = 1/2$  na vizinhança de  $\lambda^* = 1/2$ .

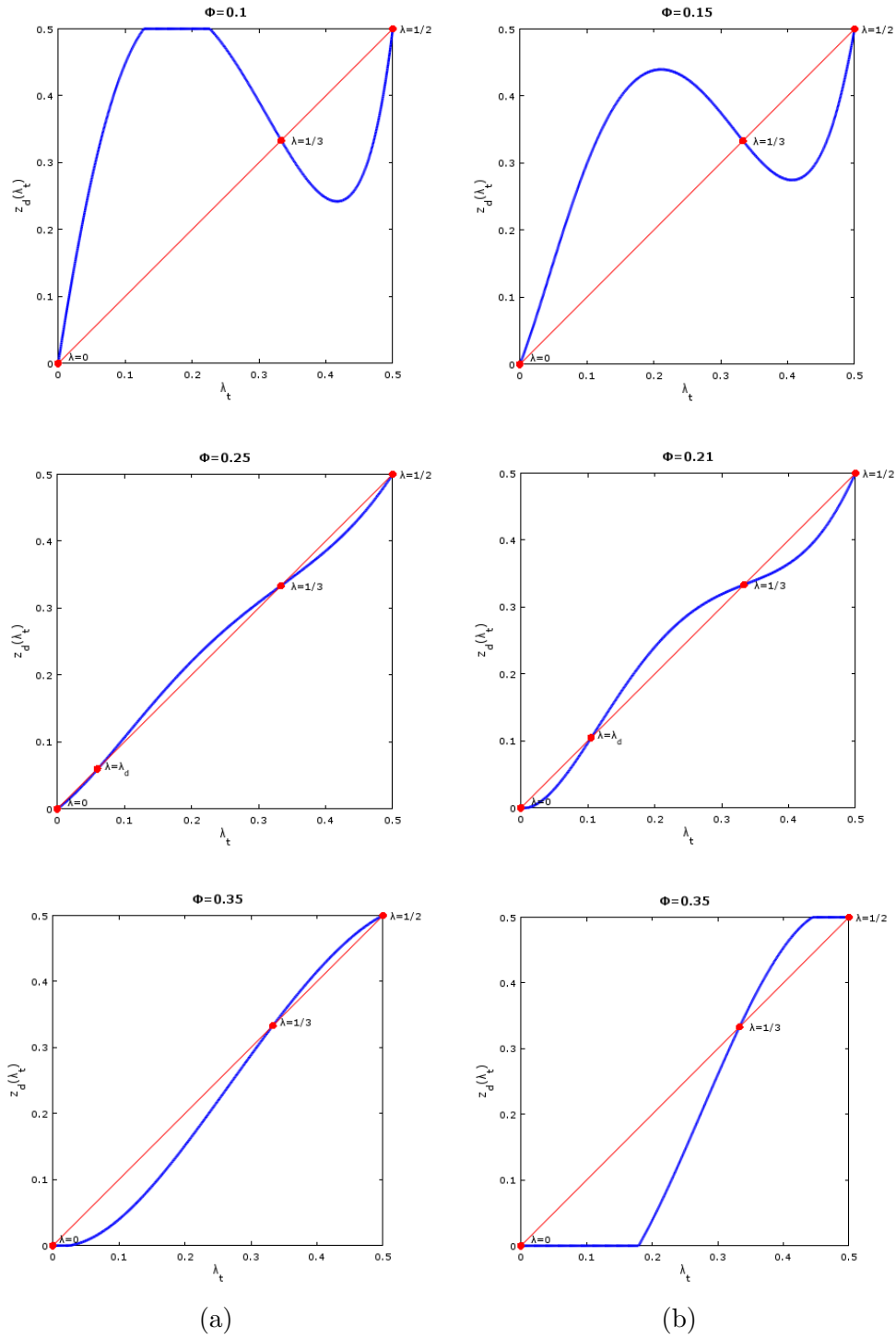


Figura 3.7: Representação gráfica de  $z_d(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ . Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , a linha a vermelho representa a função identidade e a sua interseção com o gráfico de  $z_d(\lambda_t)$  identifica um ponto de equilíbrio. Para  $0.2 \leq \phi \leq 0.25$  salienta-se a presença de um ponto fixo interior assimétrico,  $\lambda^* = \lambda_d$ .

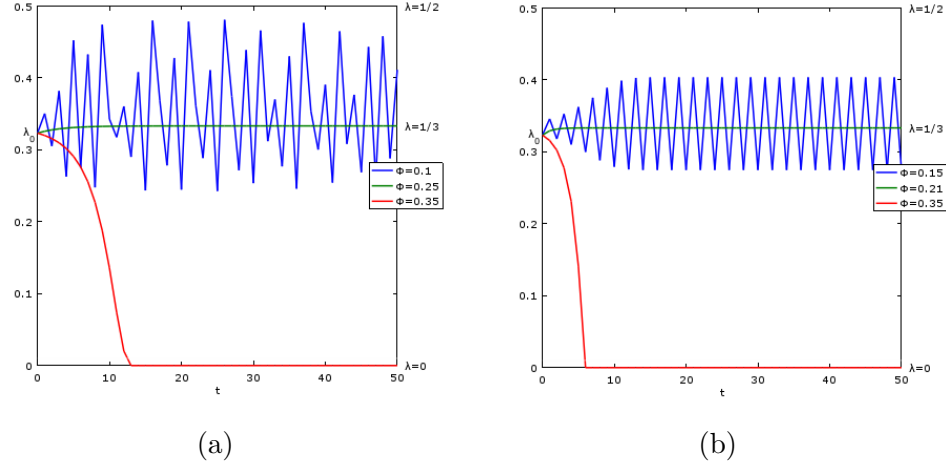


Figura 3.8: **Trajétória da solução de (3.15) dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ .**

Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica descrita por  $z_d(\lambda_t)$  em (3.15) para uma condição inicial  $\lambda_0 = 1/3 - \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.01$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

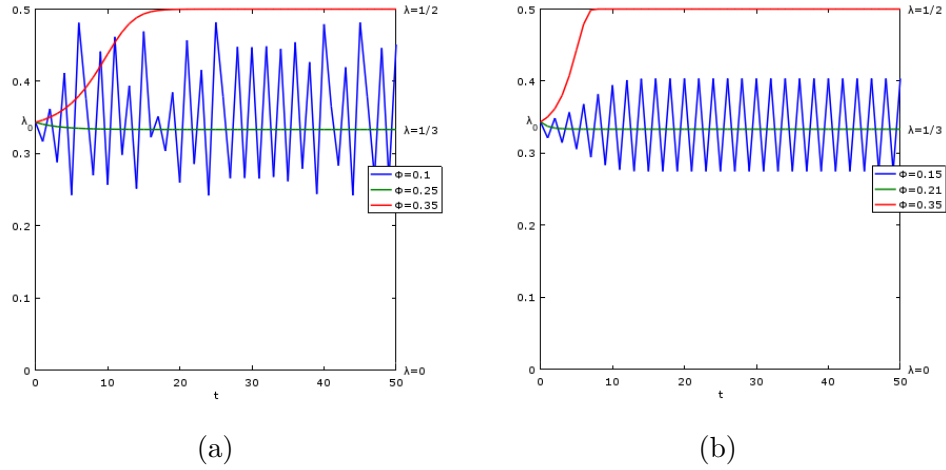


Figura 3.9: **Trajétória da solução de (3.15) dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$ .**

Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica descrita por  $z_d(\lambda_t)$  em (3.15) para uma condição inicial  $\lambda_0 = 1/3 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.01$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

### 3.3.3 Diagrama de bifurcação

Um diagrama de bifurcação representa os pontos de equilíbrio e a sua estabilidade em função do parâmetro de bifurcação<sup>7</sup>, que se dispõe no eixo horizontal. Neste caso,  $\phi$  assume esse papel, sob a constância dos parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\gamma$ . No eixo vertical tem-se a variável de estado,  $\lambda$ . Recorre-se ao desenho a traço cheio para ilustrar os pontos fixos estáveis. A tracejado retratam-se os instáveis.

A Figura 3.10 mostra que, para  $\phi \in (0, 0.35]$ , a partir do ponto  $a$ , onde surge a primeira bifurcação de *duplicação do período*, valores decrescentes de  $\phi$  conduzem a uma infinita cascata deste tipo de bifurcações, culminando no já conhecido comportamento caótico das soluções. Na área preenchida a vermelho, o sistema de equações às diferenças (3.15) apresenta soluções periódicas de todos os períodos, assim como algumas soluções aperiódicas. Note-se que, se se persistir no decréscimo de  $\phi$  para valores à esquerda de  $b$ , o truncamento a que está sujeita a função  $z_d$  força a aglomeração (parcial) da indústria nas regiões idênticas. Para valores suficientemente elevados de  $\phi$ , observa-se a perda de estabilidade do ponto fixo  $\lambda^* = 1/3$ , tal como verificado na subsecção 3.3.2, ou a favor de uma dispersão assimétrica, ou da aglomeração, seja ela total ou parcial.

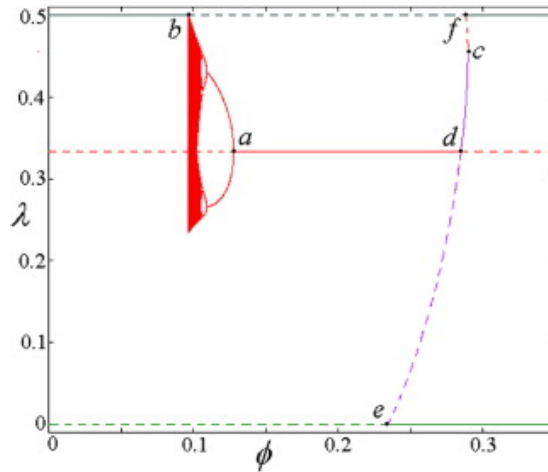


Figura 3.10: **Diagrama de bifurcação da aplicação  $z_d$ , dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ .**

Fonte: Commendatore *et al.* (2015b), Fig. 2.

<sup>7</sup>Um valor de bifurcação do parâmetro é aquele para o qual se altera o número ou a estabilidade dos pontos fixos ou dos pontos periódicos.

### 3.4 Uma região sem indústria

Assumir  $\lambda_k = 0$  determina  $\lambda_j = 1 - \lambda_i$ , o que equivale à concentração de toda a mão-de-obra qualificada nas regiões  $i$  e  $j$ , ainda que em frações não necessariamente iguais. As variáveis que concorrem para a determinação do sistema (3.5) podem ser reescritas com base numa única variável de estado,  $\lambda_i \equiv \lambda$ , sendo a percentagem de trabalhadores qualificados ativos na outra região obtida residualmente face a  $\lambda$ . Assim, tem-se

$$\Delta_{i,t} = \lambda_t + \phi(1 - \lambda_t), \quad \Delta_{j,t} = 1 - \lambda_t(1 - \phi), \quad (3.17)$$

$$s_{i,t} = \frac{\frac{\sigma - \mu}{3} + \frac{\mu\phi\lambda_t}{3\sigma} \left( \frac{\sigma - \mu}{\phi} + \frac{2\sigma + \mu}{\Delta_{j,t}} \right)}{\sigma - \mu\lambda_t \left( \frac{1}{\Delta_{i,t}} - \frac{\phi}{\Delta_{j,t}} \right)}, \quad s_{j,t} = \frac{2\sigma + \mu}{3\sigma} - s_{i,t}, \quad (3.18)$$

$$s_{k,t} = \frac{\sigma - \mu}{3\sigma}, \quad (3.19)$$

$$D_t = \lambda_t \Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} \right) \right] + (1 - \lambda_t) \Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$K_{i,t} = \frac{\Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} \right) \right]}{D_t}, \quad K_{j,t} = \frac{\Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right) \right]}{D_t}. \quad (3.21)$$

De modo análogo ao do tratamento das variáveis efetuado na secção 3.3, a utilização dos espaços invariantes permite a ilustração gráfica das funções para valores seleccionados de  $\phi$ , dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ . Todavia, por serem qualitativamente equivalentes os resultados, optou-se por destacar apenas alguns aspetos, omitindo-se, por esse motivo, as representações, que podem ser consultadas em Apêndice (Figuras A.1-A.5).

Comece por referir-se que, onde antes a dispersão simétrica ocorria para  $\lambda = 1/3$ ,



num contexto de uma região sem indústria tal acontece para  $\lambda = 1/2$ , sendo este o ponto onde se centram as propriedades atestadas na secção 3.3. No que concerne à quota-parte da despesa que é realizada em cada uma das regiões, de imediato se observa a constância de  $s_k$ , de fácil dedução pela expressão em (3.19). A percentagem da despesa total que é realizada na região  $k$  é imutável ao longo do tempo, isto porque nela não se desenvolve nem se irá desenvolver qualquer atividade industrial. Ao considerar-se não existir entrada ou saída de mão-de-obra qualificada, o rendimento nominal  $Y_k$  permanece inalterado, assim como o poder de compra dos seus residentes, somente trabalhadores que se dedicam ao setor agrícola, o que se reflete na invariabilidade do montante de despesa que realizam. Adicionalmente, a devida adaptação à Proposição 3.3.1 estabelece que quando as regiões  $i$  e  $j$  são igualmente dotadas de trabalhadores qualificados, contribuem com frações afins para a despesa total, i.e.,  $s_i(1/2) = s_j(1/2)$ ,  $\forall \phi \in (0, 1]$ .

Na presença de duas regiões que partilham a produção industrial e uma terceira onde a manufatura não existe, o salário médio real  $\bar{\omega}_t$ , dado em extensão por (3.20), obtém-se pela soma

$$\bar{\omega}_t = \lambda_t \omega_{i,t} + (1 - \lambda_t) \omega_{j,t},$$

onde a primeira componente pondera o salário real na região  $i$ ,  $\omega_{i,t}$ , pela percentagem de trabalhadores qualificados na mesma,  $\lambda_t$ , e a segunda procede à ponderação de  $\omega_{j,t}$  pela percentagem de trabalhadores qualificados restante,  $1 - \lambda_t$ . Note-se, contudo, que o salário real da região  $k$  é não nulo e positivo. Porém, pelo facto de ser nula a percentagem de trabalhadores qualificados nessa região, muito embora nela residam trabalhadores agrícolas, a sua ponderação faz com que este fator seja eliminado do cálculo da média salarial. Relativamente a  $\omega_{i,t}$  e  $\omega_{j,t}$ , das expressões em (3.21) vem que

$$\omega_{i,t} = \Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} \right) \right], \quad (3.22)$$

$$\omega_{j,t} = \Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right) \right]. \quad (3.23)$$

As equações (3.22)-(3.23) permitem que se defina o rácio entre os salários reais das regiões  $i$  e  $j$ ,  $R_{ij,t} \equiv R(\lambda_t)$ , como

$$R(\lambda_t) = \frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}} = \frac{\Delta_{i,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} \right) \right]}{\Delta_{j,t}^{\mu/(\sigma-1)} \left[ \frac{s_{j,t}}{\Delta_{j,t}} + \phi \left( \frac{\sigma - \mu}{3\sigma\phi} + \frac{s_{i,t}}{\Delta_{i,t}} \right) \right]}. \quad (3.24)$$

Sabe-se *a priori* que, independentemente de  $\phi$ ,  $R(1/2) = 1$  quando apenas duas regiões usufruem de setor industrial. Sendo as regiões  $i$  e  $j$  equivalentemente dotadas de trabalhadores qualificados, nelas vigora o mesmo salário real e, portanto, o seu rácio iguala a unidade, para quaisquer valores dos parâmetros considerados. Acerca da influência de  $\phi$  em  $R(\lambda)$ , é idêntico o comportamento registado na Figura A.5 quando comparado com a Figura 3.6: para valores de  $\phi$  *suficientemente reduzidos*, antecipa-se a estabilidade da dispersão simétrica entre duas regiões, i.e.,  $\lambda = 1/2$ ; para  $\phi$  *suficientemente elevado*, prevalecem, sobre o efeito de concorrência, as forças de ligação.

### 3.4.1 Dinâmica nas arestas do triângulo $R$

A restrição do sistema de equações às diferenças dado por (3.5) a cada uma das arestas do triângulo  $R$  concede que a dinâmica de migração seja descrita por uma aplicação unidimensional  $z_b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definida por

$$z_b : \lambda_t \rightarrow z_b(\lambda_t) = \begin{cases} 0 & \text{se } M(\lambda_t) \leq 0, \\ M(\lambda_t) & \text{se } 0 < M(\lambda_t) < 1, \\ 1 & \text{se } M(\lambda_t) \geq 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

onde a equação central em (3.25) é determinada por (3.17)-(3.21), e igual a

$$M(\lambda_t) = \lambda_t[1 + \gamma(K(\lambda_t) - 1)]. \quad (3.26)$$

Sabe-se que uma região sem manufatura no período  $t$  não irá mobilizar a instalação de trabalhadores qualificados no período seguinte, daí que, quando este estado é atingido, assim permaneça indefinidamente. Por conseguinte, a existência de somente duas regiões onde a indústria se localiza implica que à entrada de trabalhadores numa região  $i$  corresponda a saída desses mesmos trabalhadores da região  $j$ , na medida em que se assume o número de trabalhadores qualificados  $N$  constante. Com efeito, as variáveis que concorrem para a determinação de (3.26) são simétricas, como atesta o

**Lema 3.4.1** (Commendatore *et al.*, 2015b, p. 71). *A função  $z_b$  goza das seguintes propriedades:*

1. *Simétrica relativamente ao ponto  $(\lambda, z_b(\lambda)) = (1/2, 1/2)$ :  $z_b(\lambda) = 1 - z_b(1 - \lambda)$ .*
2. *Qualquer conjunto invariante  $A$  de  $z_b$  ou é ele próprio simétrico, ou existe um conjunto invariante  $A'$  simétrico a  $A$ .*

### 3.4.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade

O estado  $\lambda^* \in [0, 1]$  é um ponto fixo de  $z_b(\lambda)$  se e só se  $z_b(\lambda^*) = \lambda^*$ . Sendo o sistema (3.25) composto por três ramos, são também três os casos a analisar na dinâmica de migração por si imposta, à semelhança do que sucedera na subsecção 3.3.2, perante duas regiões idênticas.

*Caso 1.*  $M(\lambda_t) < 0, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$z_b(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = 0.$$

*Caso 2.*  $M(\lambda_t) > 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$z_b(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = 1.$$

Note-se que para  $\lambda^* = 0$  se tem a aglomeração do setor industrial na região  $j$ , na medida em que esta oferece uma utilidade indireta superior à usufruída na região  $i$ , por ser  $M(\lambda_t) < 0$ . Já  $\lambda^* = 1$  concentra, por inteiro, a laboração do setor industrial na região  $i$ , sendo a procura pelo bem compósito industrial satisfeita a partir da exportação da região  $i$  para as restantes. Por conduzi-rem ambos à formação de uma estrutura centro-periferia, estes dois primeiros casos são equivalentes. Em termos do sistema (3.5), tal significa, portanto, a existência de pontos fixos do tipo  $CP_i$ :  $(0, 0, 1)$ ;  $(0, 1, 0)$ ; e  $(1, 0, 0)$ .

*Caso 3.*  $0 \leq M(\lambda_t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
z_b(\lambda^*) = \lambda^* &\Leftrightarrow M(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda[1 + \gamma(K(\lambda^*) - 1)] = \lambda \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda[\gamma(K(\lambda^*) - 1)] = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \gamma(K(\lambda^*) - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
&\stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \lambda^* = 0 \vee K(\lambda^*) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1] : \omega_{i,t} = \bar{\omega}_t\},
\end{aligned}$$

o que, no caso de  $\lambda_k = 0$ , equivale a

$$\begin{aligned}
\omega_{i,t} &= \lambda^* \omega_{i,t} + (1 - \lambda^*) \omega_{j,t} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega_{i,t}(1 - \lambda^*) = (1 - \lambda^*) \omega_{j,t} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega_{i,t} = \omega_{j,t},
\end{aligned}$$

traduzindo uma igualdade entre o salário real das regiões  $i, j$ . Sabe-se de antemão que, pela configuração do modelo, esta igualdade ocorre para  $\lambda^* = 1/2$ . Em termos do sistema (3.5), tal significa a existência dos pontos fixos do tipo  $S_i$ :  $(1/2, 1/2, 0)$ ;  $(1/2, 0, 1/2)$ ; e  $(0, 1/2, 1/2)$ .

A atividade económica industrial distribui-se, neste caso, equivalentemente entre duas das regiões, ausentando-se na terceira delas.

Adicionalmente, para valores crescentes de  $\phi$ , o ponto fixo  $\lambda^* = 1/2$  é submetido a uma bifurcação *pitchfork supercrítica*, comum em sistemas dinâmicos que possuem algum tipo de simetria. Devido a esta bifurcação, surgem mais dois pontos fixos (estáveis):  $\lambda^* = \lambda_a$  e o seu simétrico  $\lambda^* = 1 - \lambda_a$ .

Para valores decrescentes de  $\phi$  ocorrem duas bifurcações *sela-nó*. Este tipo de bifurcações encontra-se normalmente associado ao mecanismo de criação e destruição de pontos de equilíbrio. No caso, conduzem a dois pares de pontos fixos, um estável,  $\lambda^* = \lambda_a$ , e um instável,  $\lambda^* = \lambda_b$ , e respetivos simétricos (Commendatore *et al.*, 2015b, p. 72). A este respeito veja-se a Figura 3.16, que representa o diagrama de bifurcação de  $z_b$ . Assim, para certos valores dos parâmetros, o sistema (3.5) possui os seguintes pontos fixos assimétricos:

$$\begin{aligned} A_{11} : (0, \lambda_a, 1 - \lambda_a), \quad A_{12} : (0, \lambda_b, 1 - \lambda_b), \quad A_{13} : (0, 1 - \lambda_a, \lambda_a), \quad A_{14} : (0, 1 - \lambda_b, \lambda_b); \\ A_{21} : (\lambda_a, 0, 1 - \lambda_a), \quad A_{22} : (\lambda_b, 0, 1 - \lambda_b), \quad A_{23} : (1 - \lambda_a, 0, \lambda_a), \quad A_{24} : (1 - \lambda_b, 0, \lambda_b); \\ A_{31} : (\lambda_a, 1 - \lambda_a, 0), \quad A_{32} : (\lambda_b, 1 - \lambda_b, 0), \quad A_{33} : (1 - \lambda_a, \lambda_a, 0), \quad A_{34} : (1 - \lambda_b, \lambda_b, 0); \end{aligned}$$

onde  $A_{in}$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $n \in \{1, \dots, 4\}$ , pertence à linha invariante  $\{\lambda_i = 0\}$ . Estes equilíbrios repartem assimetricamente o setor industrial entre duas das regiões (1 e 2; 1 e 3; ou 2 e 3), ausentando-se na terceira.

A Figura 3.11 representa graficamente a função  $z_b$  para diferentes valores de  $\phi$ , cuja interseção com a bissetriz dos quadrantes ímpares desenhada a vermelho identifica um ponto fixo. As Figuras 3.12 e 3.13 ilustram a trajetória da solução de (3.25) para condições iniciais, respetivamente, à esquerda e à direita do equilíbrio de aglomeração parcial  $S_i$ . A partir destas representações, iremos agora inferir acerca da estabilidade dos pontos fixos encontrados nas arestas do triângulo  $R$ .

Dados os valores dos parâmetros

- (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ , para efeitos de representação gráfica considerou-se:  $\phi = 0.05$  como  *muito reduzido*;  $\phi = 0.2$  como  *suficientemente reduzido*; e  $\phi = 0.3$  como  *suficientemente elevado*.

Conclui-se que

- para  $\phi$   *muito reduzido*, qualquer que seja a condição inicial  $\lambda_0 \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ , observa-se uma órbita periódica de período 2. Quer isto dizer que a percentagem de trabalhadores nas regiões onde labora o setor industrial oscila entre dois valores, igualando-se de dois em dois períodos, tal que  $\lambda_{t+2} = \lambda_t$ . Não há, consequentemente, convergência para qualquer ponto fixo, independentemente do horizonte temporal  $t$  que se considere (Figuras 3.12a e 3.13a).
- para  $\phi$   *suficientemente reduzido*, por ser  $0 < z'_b(1/2) < 1$ , verifica-se que  $\lambda^* = 1/2$  é  *estável* e a convergência é monótona. Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ , a aproximação ao equilíbrio faz-se pela entrada de trabalhadores qualificados na região (Figura 3.12a). Para uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ , assiste-se ao movimento migratório oposto (Figura 3.13a). Por conseguinte, é  *globalmente estável* o equilíbrio de aglomeração parcial pois, sendo  *instáveis*  $\lambda^* = 0$  e  $\lambda^* = 1$ , constitui um atrator para todo  $\lambda_0 \in ]0, 1[$ .
- para  $\phi$   *suficientemente elevado*,  $z'_b(1/2) > 1$ . A divergência é monótona, assistindo-se, para uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ , à saída de trabalhadores qualificados da região  $i$  para a  $j$ , até que, para  $t = 10$ , a região de origem já se encontra totalmente despovoada desta força de trabalho (Figura 3.12a). Para uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ , o ajustamento é feito pela entrada de mão-de-obra qualificada na região até que a produção industrial se realiza em totalidade na mesma (Figura 3.13a). Assim, os equilíbrios centro-periferia são, neste caso,  *localmente assintoticamente estáveis*, enquanto o equilíbrio de aglomeração parcial passa a  *instável*.

- (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 1.8$  e  $\gamma = 20$ , considerou-se:  $\phi = 0.06$  como *muito reduzido*;  $\phi = 0.1835$  como *suficientemente reduzido*; e  $\phi = 0.3$  como *suficientemente elevado*.

Observa-se que

- para  $\phi$  *muito reduzido*, quer a trajetória se inicie à esquerda ou direita de  $\lambda^* = 1/2$ , a solução de (3.25) exibe um comportamento caótico, perceptível nas Figuras 3.12b e 3.13b, com a interpretação económica já conhecida.
- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, existem 7 equilíbrios: as tradicionais configurações centro-periferia, o equilíbrio de aglomeração parcial e ainda dois outros pontos fixos assimétricos,  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$ , e respetivos simétricos,  $\lambda^* = 1 - \lambda_a$  e  $\lambda^* = 1 - \lambda_b$ . A sua existência justifica um estudo da trajetória da solução de (3.25), para diferentes condições iniciais, diferente dos demais. Observe-se a Figura 3.14 para um olhar mais detalhado sobre estes equilíbrios. Por serem  $0 < z'_b(\lambda_a) < 1$  e  $z'_b(\lambda_b) > 1$ , são *localmente assintoticamente estáveis*  $\lambda^* = \lambda_a$  e  $\lambda^* = 1 - \lambda_a$  e *instáveis*  $\lambda^* = \lambda_b$  e  $\lambda^* = 1 - \lambda_b$ . Para  $\lambda_0 \in ]\lambda_a, 1/2[$ , a convergência para  $\lambda_a$  é feita pela saída de trabalho qualificado da região  $i$ . Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/2, 1 - \lambda_a[$ , assiste-se à entrada de trabalhadores qualificados na região  $i$  (Figura 3.15b). O equilíbrio de aglomeração parcial é, portanto, *instável*. É, então, possível termos um equilíbrio de longo-prazo onde a indústria se reparte de forma desigual entre duas regiões. Em relação às configurações centro-periferia, para  $\lambda_0 \in ]0, \lambda_b[$  presencia-se a saída de trabalhadores de  $i$  até à sua completa desertificação em termos de trabalho qualificado. Então,  $\lambda^* = 0$  é *localmente assintoticamente estável*. Para  $\lambda_0 \in ]1 - \lambda_b, 1[$ , entram na região trabalhadores qualificados até que a indústria se concentra nela por inteiro. Assim,  $\lambda^* = 1$  é também *estável*.
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*,  $z'_b(1/2) > 1$  expressa a instabilidade deste ponto fixo. O equilíbrio  $\lambda^* = 0$  surge, dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ , pela saída monótona de trabalhadores da região  $i$  (Figura 3.12a). Para uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ , o sistema converge para  $\lambda^* = 1$ .

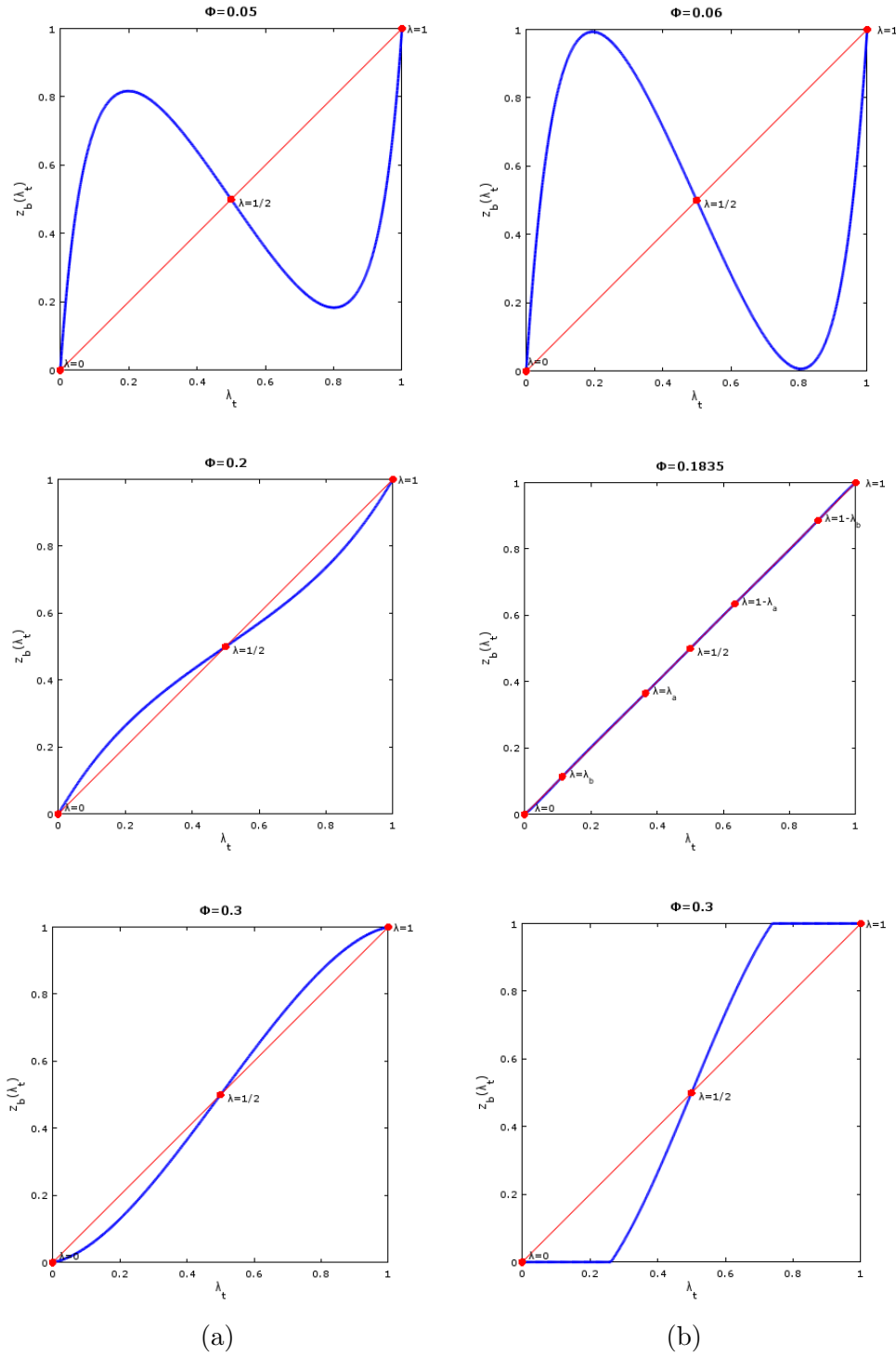


Figura 3.11: **Representação gráfica de  $z_b(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ .** Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , a linha a vermelho representa a função identidade e a sua interseção com o gráfico de  $z_b(\lambda_t)$  identifica um ponto de equilíbrio. Salienta-se a existência de 7 pontos fixos em (b) para  $\phi = 0.1835$ .



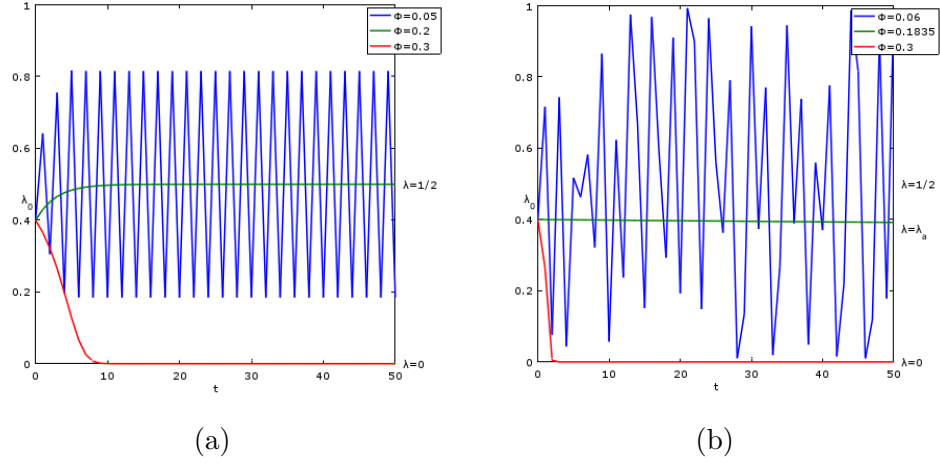


Figura 3.12: **Trajetória da solução de (3.25) dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ .**

Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica imposta por  $z_b(\lambda_t)$  em (3.25) para uma condição inicial  $\lambda_0 = 1/2 - \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

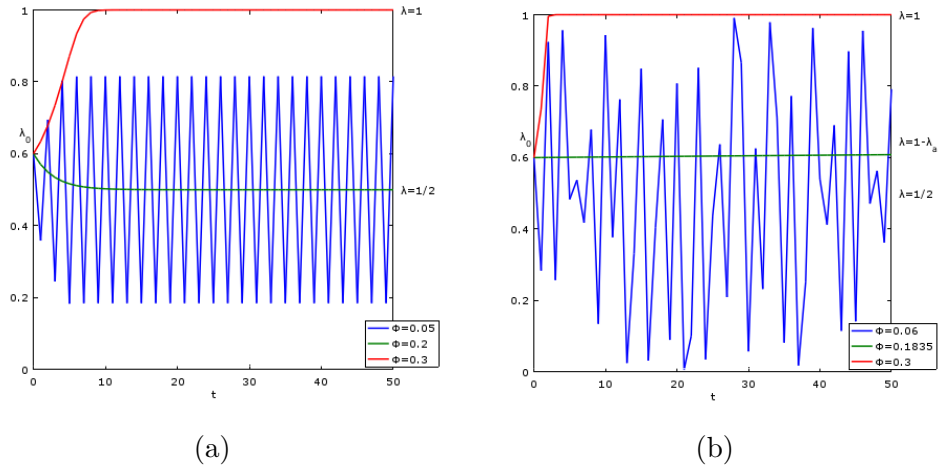


Figura 3.13: **Trajetória da solução de (3.25) dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ .**

Dados (a)  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ ; (b)  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica imposta por  $z_b(\lambda_t)$  em (3.25) para uma condição inicial  $\lambda_0 = 1/2 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

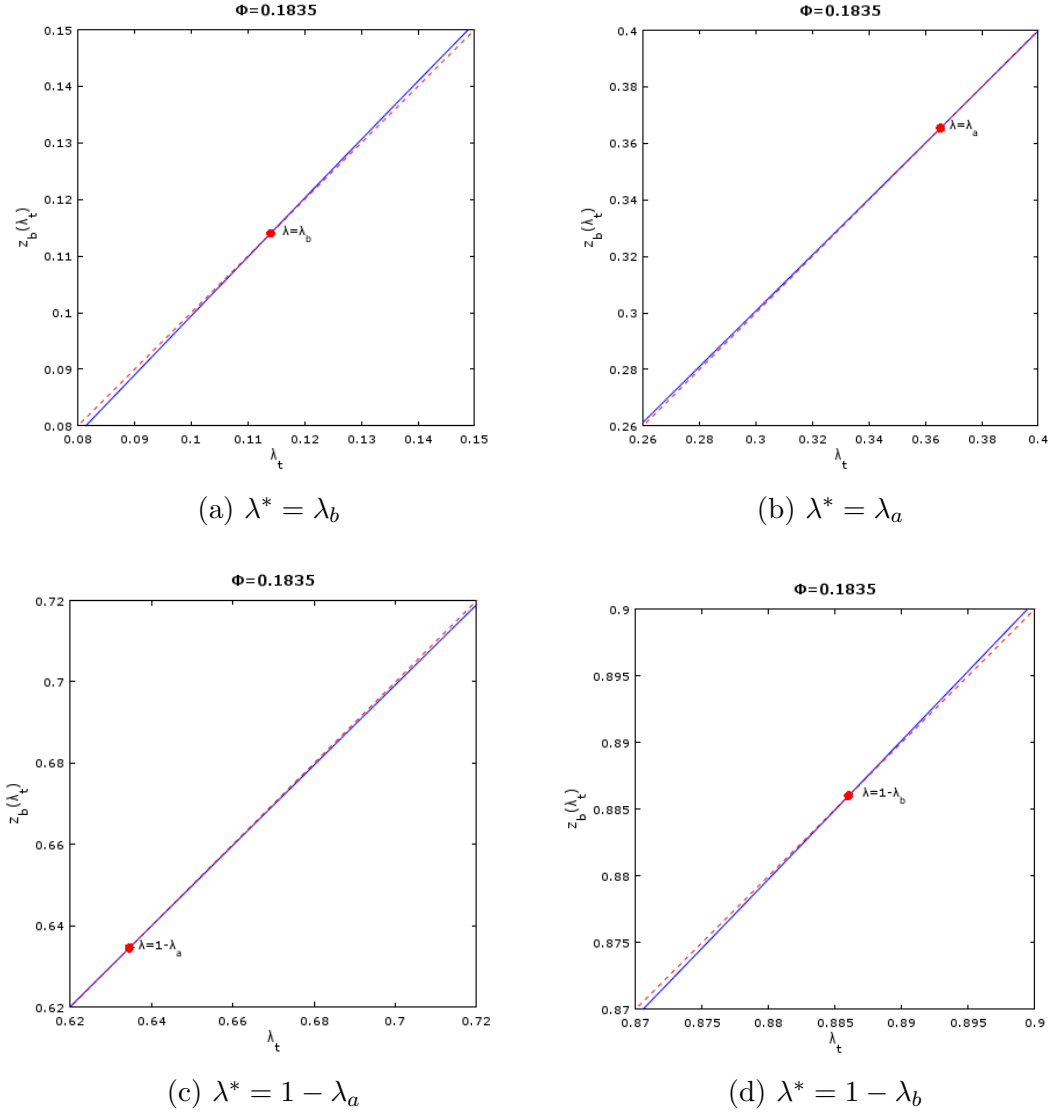


Figura 3.14: **Alargamento da representação gráfica da função  $z_b(\lambda_t)$  para  $\phi = 0.1835$ .**

Dados  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para  $\phi = 0.1835$  a figura procede a um *zoom* sobre os 4 pontos fixos interiores assimétricos. A linha azul a traço cheio representa a função  $z_b$ . A vermelho tracejado tem-se a bissetriz dos quadrantes ímpares. Em (a), verifica-se que, para  $\lambda_t \in ]0, \lambda_b[$ ,  $z_b(\lambda_t) < \lambda_t$ . Em (b), para  $\lambda_t \in ]\lambda_b, \lambda_a[$ ,  $z_b(\lambda_t) > \lambda_t$ , passando a inferior no intervalo  $]\lambda_a, 1/2[$ . O mesmo tipo de comportamento é exibido na proximidade dos seus pontos fixos simétricos,  $1 - \lambda_b$  e  $1 - \lambda_a$ , nas subfiguras (c) e (d).

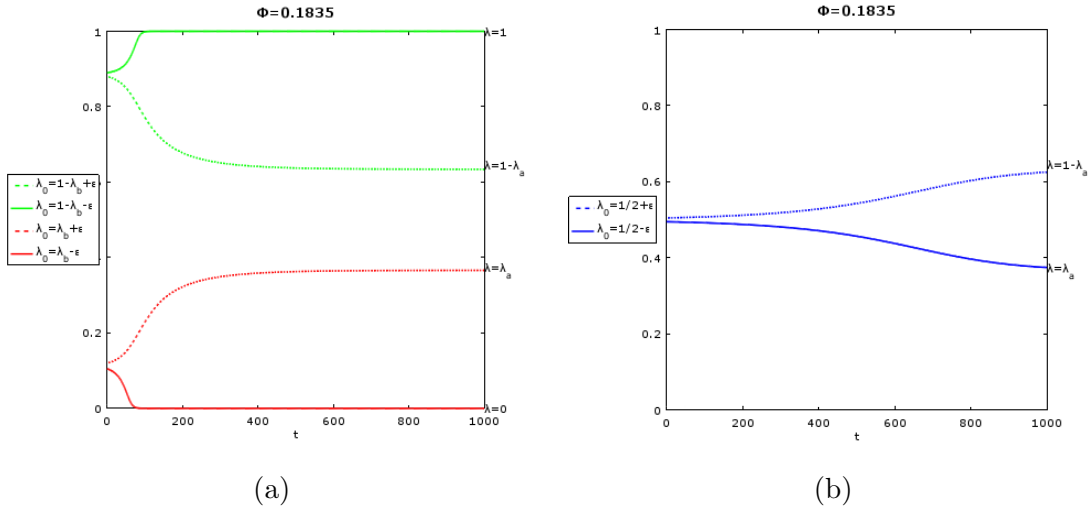


Figura 3.15: **Trajetória da solução de (3.25) para  $\phi = 0.1835$  e diferentes  $\lambda_0$ .** Dados  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 5$  e  $\gamma = 20$ , para  $\phi = 0.1835$  e  $t = 1000$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução de (3.25) para condições iniciais próximas: (a) do ponto fixo  $\lambda^* = 1 - \lambda_b$  a verde, e de  $\lambda^* = \lambda_b$  a vermelho; (b) do ponto de equilíbrio  $S_i$ , com  $\epsilon = 0.01$ .

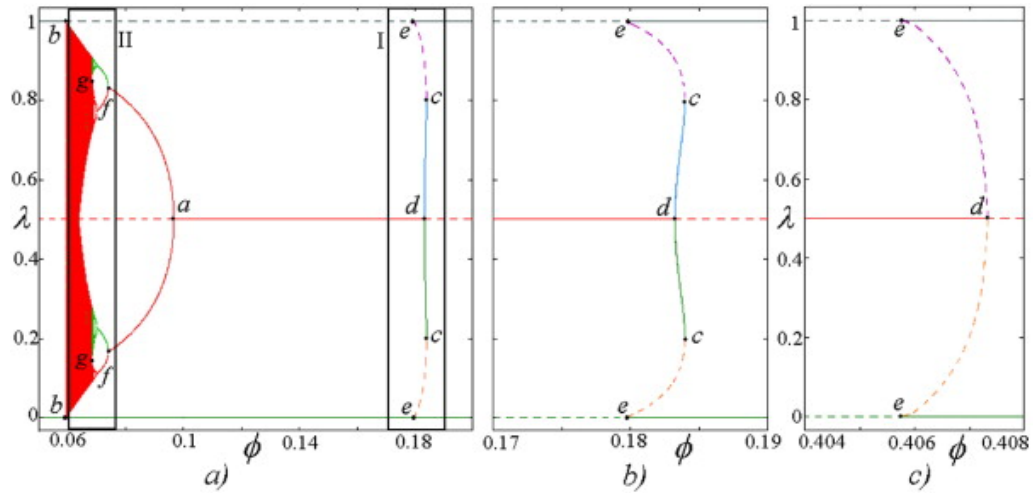


Figura 3.16: **Diagrama de bifurcação da aplicação  $z_b$ , dados  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 1.8$  e  $\gamma = 20$ .**

Identicamente à Figura 3.10, identifica-se em  $a$  uma bifurcação de *duplicação do período*, a partir da qual, para valores decrescentes de  $\phi$ , o modelo exibe um comportamento caótico. À direita de  $a$ , o equilíbrio de aglomeração parcial  $\lambda^* = 1/2$  é estável até  $d$ . O surgimento de uma bifurcação *pitchfork supercrítica* origina os pontos fixos estáveis  $\lambda^* = \lambda_a$  e  $\lambda^* = 1 - \lambda_a$ . No ponto  $c$  emergem os instáveis  $\lambda^* = \lambda_b$  e  $\lambda^* = 1 - \lambda_b$ , a partir de uma bifurcação *sela-nó*.

Fonte: Commendatore *et al.* (2015b), Fig. 4.

### 3.5 Três regiões com indústria

Regressados ao modelo com três regiões e ao sistema dado por (3.5), os pontos fixos identificados nas secções precedentes correspondem a pontos fixos da dinâmica descrita por  $Z$  em (3.5), muito embora as propriedades de estabilidade possam mudar devido à dimensionalidade mais elevada da dinâmica (Commendatore e Kubin, 2013, p. 169).

Completo o estudo no que as espaços invariantes diz respeito, interessa, neste ponto, estudar o que acontece quando nos encontramos fora deles. A complexidade do modelo exige, contudo, a condução desta análise com recurso a simulação numérica, assumindo  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$  como valores dos parâmetros para diferentes condições iniciais, consoante o ponto fixo em estudo. No interior do triângulo  $R$ , são seis os pontos de aproximação a cada tipo de equilíbrio, com as condições iniciais a serem indicadas pelo confronto das suas medianas. Todavia, na ausência de caos a estabilidade de cada equilíbrio é preservada, como em tempo contínuo, pela permutação das regiões. Esta propriedade escusa, portanto, a análise a cinco dos casos previstos para cada ponto fixo da equação às diferenças (3.5), limitando-a a um deles e perfazendo um total de três.

Em face de valores de  $\phi$  *muito reduzidos*, o modelo entra num regime caótico, com pequenas variações do parâmetro a provocarem alterações profundas no comportamento económico de longo prazo. Com esta dissertação procura-se, precisamente, perceber se esta é uma característica do modelo intrínseca à sua discretização e, portanto, inevitável, ou se é possível construir uma dinâmica alternativa em tempo discreto que corrija este problema. O capítulo precedente tratará esta questão.

Concentremo-nos, por agora, no estudo da estabilidade dos equilíbrios no caso em que o modelo se manifesta ‘bem comportado’, i.e., para valores de  $\phi$  *suficientemente reduzidos* ou *elevados*. No primeiro caso, ilustra-se o que acontece na economia quando os custos de transporte são ainda elevados o suficiente para fazer prevalecer as forças de dispersão, ao passo que no segundo simula-se a sua redução para um nível que propicia a aglomeração da atividade económica industrial numa única região.

### 3.5.1 Equilíbrio de dispersão simétrica

Partindo de uma condição inicial suficientemente próxima do equilíbrio  $S_s = (1/3, 1/3, 1/3)$ , obtiveram-se, para valores de  $\phi$  selecionados, as trajetórias que constam da Figura 3.17. Para efeitos da sua ilustração considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido* (Figura 3.17a); e  $\phi = 0.35$  como *suficientemente elevado* (Figura 3.17b).

Da sua observação infere-se que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, o equilíbrio de dispersão simétrica afigura-se *localmente assintoticamente estável*. Assim sendo, assiste-se, no longo prazo, à dispersão da atividade económica industrial entre as três regiões em frações iguais;
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, o equilíbrio de dispersão simétrica assume-se *instável* e o equilíbrio centro-periferia passa a *estável*. Presencia-se, neste caso, a aglomeração da indústria na região que possuía, em  $t = 0$ , a maior percentagem de trabalhadores qualificados.

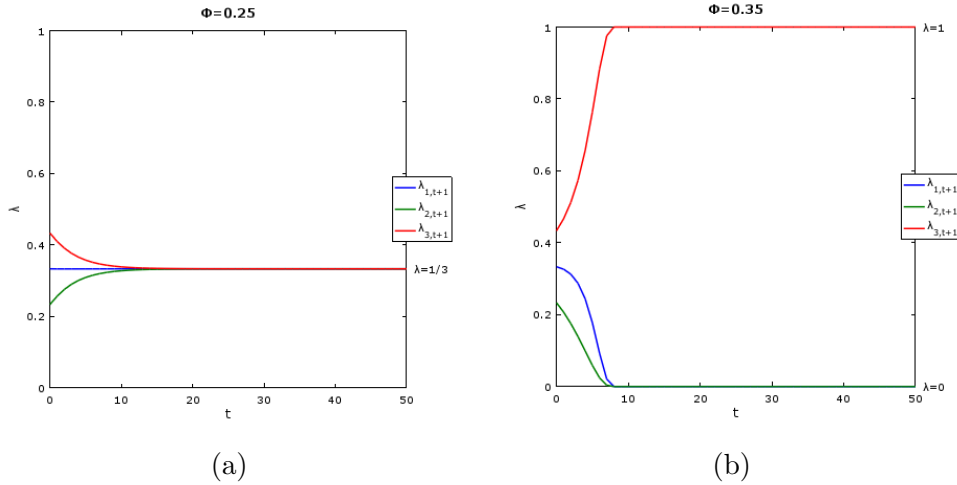


Figura 3.17: Trajetória da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de  $S_s$ .

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ , para as condições iniciais  $\lambda_{1,0} = 1/3$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/3 - \varepsilon$  e  $\lambda_{3,0} = 1/3 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica descrita por  $Z$  em (3.5) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b)  $\phi = 0.35$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

### 3.5.2 Equilíbrio de aglomeração parcial

Seja agora a condição inicial suficientemente próxima do equilíbrio  $S_i = (1/2, 1/2, 0)$ . Obtiveram-se, para valores de  $\phi$  selecionados, as trajetórias que constam da Figura 3.18. Para efeitos da sua representação considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido*; e  $\phi = 0.35$  como *suficientemente elevado*. As conclusões que se retiram da sua observação vão ao encontro do referido na secção 3.5.1, na medida em que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, existe uma convergência da solução de (3.5) para o equilíbrio de dispersão simétrica, afastando-se do equilíbrio de aglomeração parcial. Assim,  $S_s$  afigura-se *localmente assintoticamente estável*, sendo  $S_i$  *instável*;
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, a dispersão simétrica deixa de ser estável, mas nem por isso a aglomeração parcial assume a condição de equilíbrio de longo-prazo, continuando a ser *instável* mesmo diante do aumento de  $\phi$ . Assiste-se, então, à concentração da indústria na região que produzia inicialmente um maior número de variedades industriais.

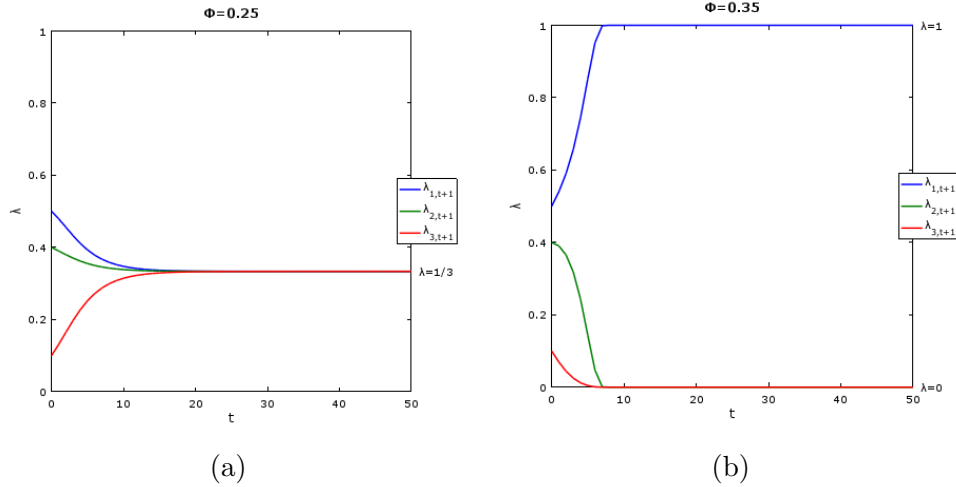


Figura 3.18: Trajetória da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de  $S_i$ .

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ , para  $\lambda_{1,0} = 1/2$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/2 - \varepsilon$  e  $\lambda_{3,0} = \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica descrita por  $Z$  em (3.5) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b) para  $\phi = 0.35$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.

De facto, ainda que se considere  $\lambda_3 = 0$  e se atribuem às regiões 1 e 2, no momento inicial, percentagens de trabalho qualificado afins, não se observa convergência para o equilíbrio de aglomeração parcial. Veja-se, a este respeito, a Figura 3.19:

- (a) Na Figura 3.19a recorre-se a  $\phi = 0.2$ , um valor do parâmetro que atribuíra estabilidade ao equilíbrio de aglomeração parcial na presença de duas regiões idênticas. Verifica-se, numa fase inicial, a igual repartição da mão-de-obra qualificada entre as duas regiões, ausentando-se na terceira. Esta distribuição do setor industrial mantém-se em cerca de  $t = 40$  períodos, instante a partir do qual se assiste à migração de trabalhadores das regiões 1 e 2 para a região 3. Note-se que estas deslocções estão em desacordo com a assunção inicial de que os trabalhadores não vão para uma região onde no período anterior não existia manufatura.
- (b) Na Figura 3.19b faz-se uso de  $\phi = 0.25$ . Presencia-se, no longo prazo, a aglomeração da indústria na região 1 e a desertificação da mesma nas regiões 2 e 3. Apesar da proximidade inicial das percentagens  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $1/2$ , isso não impede que a solução do modelo seja uma estrutura centro-periferia.

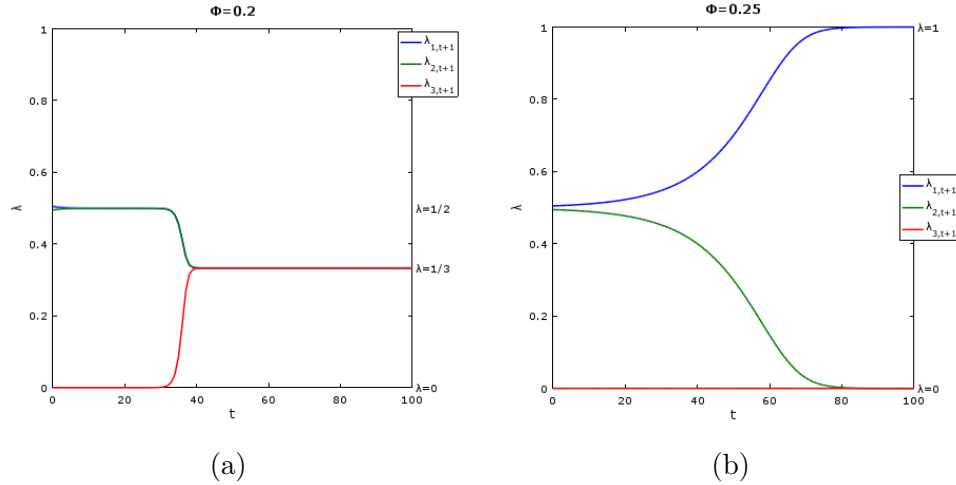


Figura 3.19: **Trajetória da solução de (3.5) para  $\lambda_{3,0} = 0$ .**

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\gamma = 10$ , para as condições iniciais  $\lambda_{1,0} = 1/2 + \varepsilon$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/2 - \varepsilon$  e  $\lambda_{3,0} = 0$ , com  $\varepsilon = 0.01$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica descrita por  $Z$  em (3.5) para: (a)  $\phi = 0.2$ ; (b)  $\phi = 0.25$ , ao longo de  $t = 100$  instantes.

Dessarte, comprova-se que a mais elevada dimensionalidade do modelo provoca alterações à estabilidade dos equilíbrios face à restrição do mesmo aos espaços invariantes. Num contexto de três regiões, o equilíbrio de aglomeração parcial nunca é estável.

### 3.5.3 Equilíbrio centro-periferia

Admitindo uma condição inicial suficientemente próxima do equilíbrio  $CP_i = (0, 0, 1)$ , obtiveram-se, para valores de  $\phi$  selecionados, as trajetórias que constam da Figura 3.20. Para efeitos da sua representação considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido*; e  $\phi = 0.2516$  como *suficientemente elevado*. Conclui-se que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, existe uma convergência da solução de (3.5) para o equilíbrio de dispersão simétrica, afastando-se do equilíbrio centro-periferia. Predominam as forças de dispersão, apresentando-se  $S_s$  como *estável*;
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, o equilíbrio centro-periferia passa a *estável*. Assiste-se, assim, à aglomeração da indústria na região que concentrava inicialmente um maior número de empresas, i.e., trabalhadores qualificados.

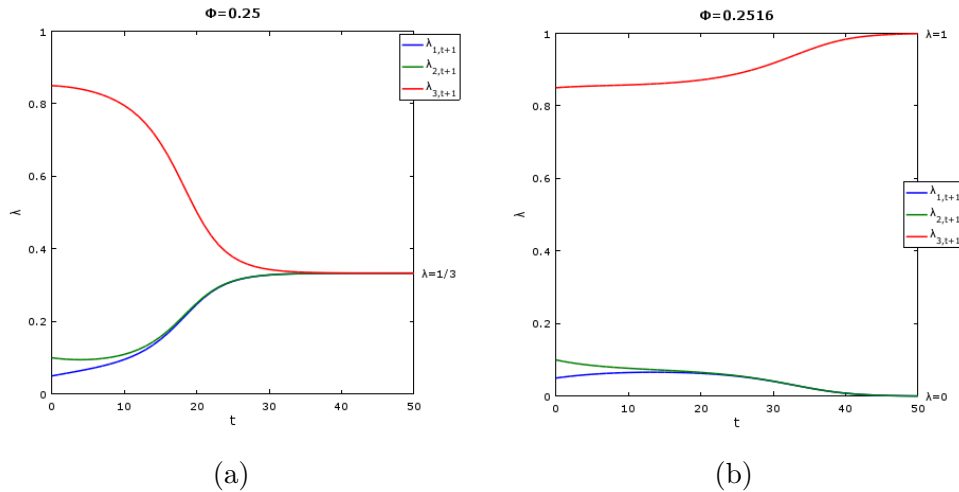


Figura 3.20: **Trajétoria da solução de (3.5) com condições iniciais próximas de  $CP_i$ .**

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\gamma = 10$ , para condições iniciais próximas do equilíbrio  $(0, 0, 1)$ , com  $\lambda_{1,0} = \varepsilon$ ,  $\lambda_{2,0} = 2\varepsilon$ ,  $\lambda_{3,0} = 1 - 3\varepsilon$  e  $\varepsilon = 0.05$ , tem-se a trajetória da solução da dinâmica descrita por  $Z$  em (3.5) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b)  $\phi = 0.2516$ , ao longo de  $t = 50$  instantes.



## 4 Dinâmica alternativa

A introdução de dinâmica no desenvolvimento de modelos centro-periferia mais próximos da realidade, nomeadamente pela inclusão de um maior número de regiões, proporciona uma escolha entre modelação em tempo discreto ou contínuo. Em tempo discreto, assume-se que a migração dos trabalhadores toma lugar em intervalos de tempo, ao passo que a modelação em tempo contínuo reflete, como o próprio nome indica, a sua continuada deslocalização. Muito embora grande parte da literatura de NEG contemple modelos formulados em tempo contínuo, para trabalhar com um número elevado de regiões antecipa-se a necessidade de recorrer a métodos numéricos de simulação para os quais o tempo discreto se apresenta mais adequado. Porém, é relevante o modo como o enquadramento temporal afeta as dinâmicas de migração. Currie e Kubin (2006) providenciam uma primeira discretização dos modelos centro-periferia, seguindo-se, também para duas regiões, Commendatore *et al.* (2008). A extensão para três surge em Commendatore e Kubin (2013) e, depois, Commendatore *et al.* (2015b). Todos estes trabalhos têm em comum a ocorrência de caos determinístico, por oposição às versões homólogas em tempo contínuo. O comportamento de longo prazo que exibem manifesta-se desenhado da realidade económica, traduzindo uma irrealista deslocação incessante e desorganizada de trabalhadores entre regiões, ao qual o Capítulo 3 alude. Ademais, Garrido-da-Silva *et al.* (2015) observam, ante o modelo de Currie e Kubin (2006), a deslocalização de trabalhadores industriais para uma região com um salário inferior quando os custos de transporte são suficientemente elevados, o que é também uma realidade na versão de Commendatore *et al.* (2015b). A migração deixa, nesses casos, de se reger por incentivos económicos, o que contraria os próprios pressupostos do modelo. Esta

contradição incita a exploração de uma dinâmica de migração alternativa que reproduza os resultados obtidos em tempo contínuo, mantendo-se fiel aos seus pressupostos. A este respeito, considera-se relevante a referência ao modelo de Gaspar *et al.* (2013), onde, à semelhança de Fujita *et al.* (1999), a dinâmica em tempo contínuo não recorre a qualquer função de ajustamento do tipo de  $Z$ , dada por (3.5), ou a um parâmetro representativo da velocidade de migração como  $\gamma$ , que, no entender de Garrido-da-Silva (2014), têm um efeito semelhante ao de custos de transporte muito elevados<sup>1</sup>, correspondentes a um nível de integração  $\phi$   *muito reduzido*, suscitando o comportamento caótico. Identificadas as possíveis causas, Garrido-da-Silva *et al.* (2015) procedem ao estudo da problemática em questão, propondo uma nova discretização, mediante a qual os trabalhadores industriais têm incentivo em migrar enquanto persistirem diferenças entre os salários reais. A simplicidade deste modelo, aliada à convergência dos seus resultados com os de tempo contínuo propostos por Fujita *et al.* (1999), viabiliza a inobservância de caos, invalidando a hipótese de que a sua ocorrência é uma característica intrínseca à discretização do modelo, e abre caminho à sua extensão para mais regiões.

Motivado pelos frutos do trabalho de Garrido-da-Silva *et al.* (2015), o presente capítulo procede às devidas adaptações da função de migração proposta, por forma a contemplar três regiões. A secção 4.1 divulga os mecanismos a que deve obedecer tal dinâmica para imitar fiavelmente o processo de realocação em tempo contínuo proposto por Gaspar *et al.* (2013). Nas secções 4.2-4.4 procede-se ao estudo, quer analítico, quer numérico, da nova lei de migração, relevando o comportamento económico observado.

## 4.1 Migração entre regiões

O modelo dinâmico que se propõe é protagonizado por uma população de agentes míopes que atualizam as suas escolhas em resposta ao ambiente estratégico corrente, uma dinâmica que, em Teoria de Jogos, se designa por *population games*<sup>2</sup>. Perante a

---

<sup>1</sup>Quando a localização da indústria é ainda suficientemente importante, uma diferença entre os rendimentos reais provoca aquilo a que Commendatore *et al.* (2008) designam por ‘*strong reaction*’.

<sup>2</sup>Para um maior aprofundamento deste tópico, remete-se o leitor para Sandholm (2009).

possibilidade de reavaliar a sua estratégia a cada instante  $t$ , os agentes móveis decidem se pretendem ou não deslocalizar a sua atividade da região onde se encontram para um outro destino, de entre dois à escolha. De acordo com esta dinâmica<sup>3</sup>, a percentagem de trabalhadores que decide migrar é proporcional ao excedente económico proporcionado pela mudança, mensurado, num modelo centro-periferia, pelo diferencial salarial observado em relação a uma estratégia alternativa, como adiante se esclarece.

### 4.1.1 Pressupostos

Assume-se que os trabalhadores são movidos por incentivos económicos, de tal modo que uma mudança na percentagem de atividade económica industrial numa região ocorre somente perante a existência de uma região de chegada que proporciona um bem-estar, medido pelo salário real, superior ao da região de partida. Assim sendo, um trabalhador qualificado ativo na região  $j$  decide migrar para a região  $i$  se e só se  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t}$ , promovendo a correção do diferencial salarial observado entre as duas regiões.

A existência de três regiões exige, contudo, o conhecimento, em cada período, das diferenças entre os salários reais auferidos em cada uma delas. A decisão de migração de um trabalhador qualificado ativo em  $i$  resulta, dessarte, de duas comparações:  $\omega_{i,t}/\omega_{j,t}$  e  $\omega_{i,t}/\omega_{k,t}$ . Por conseguinte,  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t}$  não é condição suficiente para garantir que os industriais de  $i$  irão manter a sua residência no período seguinte, muito embora o salário oferecido na região de partida supere o que vigora na região  $j$ . Diante da possibilidade de oferta de uma utilidade indireta superior a  $\omega_{i,t}$  por parte de uma terceira região, um trabalhador qualificado a operar em  $i$  mantém, no período seguinte, a sua residência se e só se a remuneração de que auferir na região de partida é superior à vigente em todos os seus potenciais destinos, i.e.,  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t}$  e, em simultâneo,  $\omega_{i,t} > \omega_{k,t}$ .

Em cada instante  $t$ , um trabalhador qualificado que proceda à comparação entre duas regiões<sup>4</sup> depara-se com uma de três circunstâncias:

---

<sup>3</sup>Veja-se, a este respeito, a dinâmica em tempo contínuo de Smith (Sandholdm, 2009, p. 3184).

<sup>4</sup>Facilmente se depreende, a partir da exposição sequente, a análise, em tudo semelhante, com respeito a uma terceira região  $k$ .

1. Se  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t}$ , os trabalhadores qualificados ativos em  $i$  não terão qualquer incentivo em deslocar-se para a região  $j$ , pois usufruem correntemente de uma maior utilidade indireta na sua região de residência. Todavia, haverá uma percentagem de trabalhadores qualificados de  $j$  que se deslocará para a região  $i$ ;
2. Se  $\omega_{i,t} < \omega_{j,t}$ , o sentido de migração será o oposto: haverá uma percentagem de trabalhadores qualificados residentes em  $i$  a migrar para a região  $j$ , onde o bem-estar é superior e, por isso, a mão-de-obra qualificada residente na região  $j$  não estará interessada em mudar-se para a região  $i$ ;
3. Se  $\omega_{i,t} = \omega_{j,t}$ , a igualdade entre os salários reais torna indiferente a um trabalhador qualificado situar-se na região  $i$  ou na região  $j$ , não havendo lugar a movimentações de trabalhadores de uma para outra das regiões consideradas.

#### 4.1.2 Função de migração

Seja  $m_{j \rightarrow i}$  a percentagem de trabalhadores qualificados da região  $j$  que, no final do instante  $t$ , migram para a região  $i$ . Analogamente,  $m_{i \rightarrow j}$  confere a percentagem de trabalhadores qualificados que migram da região  $i$  para a região  $j$ . Então, deve a dinâmica obedecer à seguinte função de migração:

$$\lambda_{i,t+1} = F_i(\lambda_{i,t}, \lambda_{j,t}) = \lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} m_{j \rightarrow i} - \lambda_{i,t} \sum_{j=1}^3 m_{i \rightarrow j}, \quad (4.1)$$

onde a percentagem de trabalhadores qualificados na região  $i$  no instante  $t+1$  se obtém, portanto, pela adição a  $\lambda_{i,t}$ , percentagem de trabalhadores qualificados ativos na região no período corrente, da entrada em  $i$  de trabalhadores provenientes das regiões  $j, k$ , subtraída da saída de trabalhadores de  $i$  com destino às restantes regiões.

Considere-se, aditivamente, que a percentagem de trabalhadores qualificados que migra de uma região para outra é proporcional à diferença entre os salários reais, logo, tanto maior quanto maior o salário real da região de destino, quando comparada com a região de origem. São, portanto, as percentagens  $m_{i \rightarrow j}$  e  $m_{j \rightarrow i}$  crescentes com o

diferencial salarial observado. À semelhança de Garrido-da-Silva *et al.* (2015), esta percentagem é normalizada pela soma dos salários reais, por forma a garantir que se encontra no intervalo  $[0, 1]$ , vindo expressa em termos dos rácios salariais. Assim, definem-se, para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , usando  $R_{ij,t} = \frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}}$ ,

$$m_{j \rightarrow i} : ]1, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$$

$$m_{j \rightarrow i} = m_{j \rightarrow i}(R_{ij,t}) = \max \left\{ 0, \frac{\omega_{i,t} - \omega_{j,t}}{\omega_{i,t} + \omega_{j,t}} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{\frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}} - 1}{\frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}} + 1} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} \right\}; \quad (4.2)$$

$$m_{i \rightarrow j} : ]0, 1[ \rightarrow [0, 1]$$

$$m_{i \rightarrow j} = m_{i \rightarrow j}(R_{ij,t}) = \max \left\{ 0, \frac{\omega_{j,t} - \omega_{i,t}}{\omega_{i,t} + \omega_{j,t}} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}}}{\frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}} + 1} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} \right\}; \quad (4.3)$$

De acordo com (4.2) e (4.3), a equação (4.1) pode ser escrita em extensão como

$$\lambda_{i,t+1} = F_i(\lambda_{i,t}, \lambda_{j,t}) = \lambda_{i,t} + \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} \max \left\{ 0, \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} \right\} - \lambda_{i,t} \sum_{j=1}^3 \max \left\{ 0, \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} \right\}.$$

### 4.1.3 Propriedades da função de migração

A simetria exibida na migração entre duas regiões ocorre, como constata Garrido-da-Silva *et al.* (2015), por se declarar constante a população, quer no que concerne aos trabalhadores qualificados em número  $N$ , quer não qualificados,  $L$ . Concomitantemente, se são iguais os salários reais de duas regiões, não ocorre migração entre elas. Estas considerações, descritas na subsecção 4.1.1, nos pressupostos a que a migração deve obedecer, originam algumas propriedades da função (4.1) que convém sobrelevar.

**Proposição 4.1.1.** *(a) Se o salário real da região  $i$  supera o salário real da região  $j$ , a percentagem de trabalhadores da região  $j$  que migra para a região  $i$  é positiva e a percentagem de trabalhadores da região  $i$  que migra para a região  $j$  é nula.*

(b) Se são iguais os salários reais das regiões  $i$  e  $j$ , são nulas a percentagem de trabalhadores da região  $j$  que migra para a região  $i$  e a percentagem de trabalhadores da região  $i$  que migra para a região  $j$ .

*Demonstração.* (a) Se  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t}$ , então  $R_{ij,t} > 1$ . Como tal,

$$\begin{aligned} \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} > 0 &\Rightarrow \max \left\{ 0, \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} \right\} \neq 0 \Leftrightarrow m_{j \rightarrow i} > 0; \text{ e} \\ \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} < 0 &\Rightarrow \max \left\{ 0, \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} \right\} = 0 \Leftrightarrow m_{i \rightarrow j} = 0. \end{aligned}$$

(b) Se  $\omega_{i,t} = \omega_{j,t}$ , então  $R_{ij,t} = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} = \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} = 0 &\Rightarrow \max \left\{ 0, \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_{j \rightarrow i}(1) = m_{i \rightarrow j}(1) = 0. \end{aligned}$$

□

Decorre da simetria que, sendo inferior o salário real da região  $i$  face ao da região  $j$ , i.e.,  $\omega_i < \omega_j$ , é, por oposição à alínea (a) da Proposição 4.1.1, positiva a percentagem de trabalhadores da região  $i$  que migra para a região  $j$  ( $m_{i \rightarrow j} > 0$ ), e nula a percentagem de trabalhadores da região  $j$  que migra para a região  $i$  ( $m_{j \rightarrow i} = 0$ ).

**Lema 4.1.1.** *Se entram trabalhadores qualificados da região  $j$  na região  $i$ , então não saem trabalhadores qualificados da região  $i$  para a região  $j$ .*

*Demonstração.* Seja  $m_{j \rightarrow i} > 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \max \left\{ 0, \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} \right\} = \frac{R_{ij,t} - 1}{R_{ij,t} + 1} &\Rightarrow \max \left\{ 0, \frac{1 - R_{ij,t}}{R_{ij,t} + 1} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_{j \rightarrow i} > 0 \Rightarrow m_{i \rightarrow j} = 0. \end{aligned}$$

□

Pelo Lema 4.1.1 tem-se, equivalentemente, que a saída de trabalhadores qualificados de  $i$  para a região  $j$  implica que não entram trabalhadores qualificados de  $j$  na região  $i$ .

*Observação 4.1.1.* As implicações contra-recíprocas das que derivam do Lema 4.1.1, respetivamente,  $m_{i \rightarrow j} = 0 \Rightarrow m_{j \rightarrow i} > 0$  e  $m_{j \rightarrow i} = 0 \Rightarrow m_{i \rightarrow j} > 0$ , não são verdadeiras. Basta ter-se em atenção o que sucede diante de  $R_{ij,t} = 1$  [Proposição 4.1.1(b)].

Conhecidas as propriedades a que a nova dinâmica de migração obedece, procede-se, nas secções 4.2 e 4.3, à restrição da função de migração  $F$ , dada por (4.1), aos espaços invariantes<sup>5</sup>, à semelhança do que foi feito nas secções 3.3 e 3.4. Este estudo serve de apoio à secção 4.4, que contempla a laboração do setor industrial nas três regiões fora dos espaços invariantes.

## 4.2 Duas regiões idênticas

Assuma-se  $j$  como a região diferente em termos de dotação de trabalho qualificado, enquanto as regiões  $i, k$  são idênticas no que a esse fator produtivo concerne. Designa-se por  $m_{j \rightarrow i}$  a percentagem de trabalhadores qualificados da região diferente que migra para as regiões idênticas, ou seja, que sai da região  $j$  e entra em duas regiões,  $i$  e  $k$ . Então,  $m_{i \rightarrow j}$  corresponde ao movimento migratório oposto, i.e., a percentagem de trabalhadores qualificados que sai de duas regiões,  $i$  e  $k$ , e entra numa só região,  $j$ . A função<sup>6</sup>  $f_d(\lambda_t)$  corresponde à restrição da equação às diferenças (4.1) às medianas do triângulo  $R$  e fornece  $\lambda_{t+1}$ , percentagem de trabalhadores qualificados ativos nas regiões idênticas no instante  $t + 1$ , mediante a percentagem corrente. Tem-se, neste contexto,

$$m_{j \rightarrow i}(R(\lambda_t)) = \max \left\{ 0, \frac{R(\lambda_t) - 1}{R(\lambda_t) + 1} \right\}; \quad (4.4)$$

$$m_{i \rightarrow j}(R(\lambda_t)) = \max \left\{ 0, \frac{1 - R(\lambda_t)}{R(\lambda_t) + 1} \right\}, \quad (4.5)$$

---

<sup>5</sup>Relembre-se que nas medianas e arestas do triângulo  $R$ , a dinâmica é definida em termos de uma única variável de estado, o que facilita a análise qualitativa dos pontos fixos e estabilidade.

<sup>6</sup>O índice  $d$  aqui usado está relacionado com o facto de se estar a reduzir a dinâmica às diagonais do triângulo  $R$ . No caso das arestas, utiliza-se  $b$ , de *boundary*, tal como em Commendatore *et al.* (2015b).

com  $R(\lambda_t) \equiv \frac{\omega_{i,t}}{\omega_{j,t}}$  dado por (3.14).

Atente-se, todavia, no facto de que duas regiões com uma mesma percentagem de trabalho qualificado no instante  $t$  dispõem do mesmo rendimento e, consequentemente, oferecem um mesmo salário real. Assim, tem-se  $\frac{\omega_{i,t}}{\omega_{k,t}} = 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$ . Recorde-se, agora, que o rácio  $R(\lambda_t)$  procede à comparação entre a remuneração auferida nas regiões idênticas e a região diferente em termos populacionais,  $j$ . Ora, se o salário real que vigora nas regiões idênticas no momento corrente é inferior ao da região diferente, com  $0 < R(\lambda_t) < 1$ , haverá uma percentagem de trabalhadores qualificados das regiões idênticas que irá migrar para a região que oferece uma maior utilidade indireta, sendo esta percentagem medida por  $m_{i \rightarrow j}$ . Nenhum problema é ocasionado por movimentações dos trabalhadores qualificados neste sentido. A dificuldade acrescida num contexto de três regiões brota da simetria entre duas regiões quando  $R(\lambda_t) > 1$ , i.e., duas regiões oferecem um mesmo vencimento no instante  $t$ , porém superior ao de uma terceira. Nesta situação, os trabalhadores qualificados da região desigual terão incentivo em abandonar a sua residência e, indiferentemente, instalar-se numa das regiões idênticas. A deslocação de metade destes trabalhadores para cada uma das regiões iguais não é automaticamente garantida por uma restrição imediata da equação às diferenças (4.1) e coloca em causa a condição  $0 \leq \lambda_{t+1} \leq 1$  para valores do rácio  $R(\lambda_t)$ , ou correspondentes diferenciais salariais, muito elevados. Suponha-se, a título de exemplo, que, ante a possibilidade de desfrutar de um maior bem-estar nas regiões  $i, k$ , 70% dos trabalhadores qualificados da região  $j$  decide migrar. Então, de acordo com (4.1), cada uma das regiões idênticas iria albergar adicionalmente 70% de  $\lambda_{j,t}$ , perfazendo um total de 140% > 100% de trabalhadores que abandonam a região diferente no final do instante  $t$ . Por esse motivo, impõe-se a realização de um ajuste à função de migração, por forma a garantir o cumprimento de duas eventualidades:

1. Se é superior o salário real que vigora na região diferente, então assiste-se à saída de trabalhadores qualificados das regiões idênticas  $i, k$ , com base no diferencial salarial observado, em percentagens afins para a região diferente  $j$ ;



2. Caso seja o salário real das regiões idênticas superior, então metade dos trabalhadores qualificados que abandona a região diferente migra para a região  $i$  e a outra metade para  $k$ , i.e., 50% do total migratório para cada uma das regiões idênticas.

A satisfação dos pontos anteriores preconiza como solução a multiplicação da percentagem de trabalhadores qualificados da região desigual por  $1/2$ . Com esta transformação, a taxa de entrada nas regiões idênticas torna-se proporcional a  $\frac{1-2\lambda_t}{2}$ . Isto posto, a equação às diferenças que descreve a percentagem de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas no instante  $t + 1$  iguala

$$\lambda_{t+1} = f_d(\lambda_t) = \lambda_t + \left( \frac{1 - 2\lambda_t}{2} \right) m_{j \rightarrow i} - \lambda_t m_{i \rightarrow j}. \quad (4.6)$$

com  $\lambda_t \in [0, 1/2]$ . A percentagem de trabalhadores qualificados ativos, em  $t + 1$ , na região diferente é obtida residualmente face às regiões idênticas e dada por  $1 - 2\lambda_{t+1}$ . Pode-se, de forma equivalente, separar a função em ramos, sendo fácil reconhecer a semelhança desta com a dinâmica de Garrido-da-Silva *et al.* (2015):

$$\lambda_{t+1} = f_d(\lambda_t) = \lambda_t + \begin{cases} \left( \frac{1 - 2\lambda_t}{2} \right) m_{j \rightarrow i} & \text{se } R(\lambda_t) \geq 1 \\ -\lambda_t m_{i \rightarrow j} & \text{se } R(\lambda_t) < 1 \end{cases}.$$

A subsecção seguinte dedica-se ao estudo qualitativo da função de migração (4.6), com a determinação dos pontos de equilíbrio, condições de estabilidade e posterior representação gráfica para diferentes estágios (crescentes) de integração económica entre as três regiões que compõem a economia.

### 4.2.1 Pontos de equilíbrio

A Proposição 4.1.1 e Lema 4.1.1 decretam que haverá uma percentagem de trabalhadores qualificados da região diferente que migra para as regiões idênticas caso  $m_{j \rightarrow i}$  seja diferente de zero. Em contrário, essa percentagem será nula, podendo ou não ser acom-

panhada da saída de população das regiões idênticas. Tenha-se, outrossim, presente que, ante  $R(\lambda_t) = 1$ , os trabalhadores permanecem na sua residência atual. Posto isto, os pontos fixos derivam de dois casos distintos, correspondentes à entrada ou saída de trabalhadores das regiões idênticas.

*Caso 1.*  $R(\lambda_t) \geq 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
f_d(\lambda^*) = \lambda^* &\Leftrightarrow \lambda^* + \left( \frac{1 - 2\lambda^*}{2} \right) \frac{R(\lambda^*) - 1}{R(\lambda^*) + 1} = \lambda^* \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} - \lambda^* \right) \frac{R(\lambda^*) - 1}{R(\lambda^*) + 1} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \lambda^* = 0 \vee \frac{R(\lambda^*) - 1}{R(\lambda^*) + 1} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 1/2 \vee R(\lambda^*) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 1/2 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1/2] : R(\lambda^*) = 1\}.
\end{aligned}$$

*Caso 2.*  $0 \leq R(\lambda_t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
f_d(\lambda^*) = \lambda^* &\Leftrightarrow \lambda^* - \frac{1 - R(\lambda^*)}{R(\lambda^*) + 1} \lambda^* = \lambda^* \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1 - R(\lambda^*)}{R(\lambda^*) + 1} \lambda^* = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \frac{1 - R(\lambda^*)}{R(\lambda^*) + 1} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee R(\lambda^*) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1/2] : R(\lambda^*) = 1\}.
\end{aligned}$$

O primeiro dos casos considerados supõe  $R(\lambda_t) \geq 1$ . Um rácio salarial superior à unidade promove, como se sabe, a instalação de novas empresas nas regiões idênticas, por oferecerem estas um salário real superior ao da região diferente. No limite, surge, para  $\lambda^* = 1/2$ , o equilíbrio de *aglomeração parcial*  $S_i$ , concentrando, em partes iguais, a indústria nas regiões idênticas. O segundo contempla a situação em que o bem-estar oferecido pelas regiões idênticas é inferior ao da região diferente. Diante de  $0 \leq R(\lambda_t) \leq 1$ ,

é nula a entrada de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas. Como tal,  $\lambda^* = 0$  traduz-se numa estrutura *centro-periferia*  $CP_i$ , que transforma em *centro* industrializado a região desigual e em *periferia* as regiões iguais em termos populacionais. A dispersão da atividade económica industrial entre as três regiões tem lugar quando  $R(\lambda^*) = 1$ , podendo ser *simétrica*, por via da instalação de uma terça-parte da população qualificada em cada uma das regiões ( $\lambda^* = 1/3$ ), ou *assimétrica*, com a repartição dos trabalhadores qualificados, em frações afins, nas regiões idênticas, porém díspares face a uma terceira região. Note-se que a *dispersão simétrica* é sempre solução, ao invés dos equilíbrios centro-periferia e aglomeração parcial. Desde logo se salienta esta característica como diferenciadora face à versão de Commendatore *et al.* (2015b), onde a própria configuração do modelo garante a existência, para qualquer valor dos parâmetros, dos equilíbrios centro-periferia e aglomeração parcial.

## 4.2.2 Estabilidade

O estudo da estabilidade dos pontos fixos, auxiliado pelo Teorema da Estabilidade Local, requer o cálculo da derivada de primeira ordem da função  $f_d(\lambda_t)$ , dada por

$$f'_d(\lambda_t) = 1 + \begin{cases} \left(\frac{1-2\lambda_t}{2}\right) m'_{j \rightarrow i} - m_{j \rightarrow i} & \text{se } R(\lambda_t) > 1 \\ -(\lambda_t m'_{i \rightarrow j} + m_{i \rightarrow j}) & \text{se } R(\lambda_t) < 1 \end{cases}, \quad (4.7)$$

onde

$$m'_{j \rightarrow i} = \frac{2R'(\lambda_t)}{(R(\lambda_t) + 1)^2}; \quad m'_{i \rightarrow j} = -\frac{2R'(\lambda_t)}{(R(\lambda_t) + 1)^2}. \quad (4.8)$$

A função (4.7) não está definida para  $R(\lambda_t) = 1$ , exceto se  $\lambda_t = \frac{1}{4}$ . Nesse caso,

$$f'_d(1/4) = 1 + \frac{R'(1/4)}{8}.$$

A avaliação nos pontos de equilíbrio centro-periferia e aglomeração parcial pode ser feita, sem mais, recorrendo a  $f'_d(\lambda_t)$ , desde que estes não satisfaçam  $R(0) = R(1/2) = 1$ .

**Proposição 4.2.1.** (a) A configuração aglomeração parcial com a repartição equivalente dos trabalhadores qualificados entre as regiões idênticas,  $\lambda^* = 1/2$ , é estável se  $R(1/2) > 1$ .

(b) A configuração centro-periferia com todos os trabalhadores qualificados na região diferente,  $\lambda^* = 0$ , é estável se  $0 < R(0) < 1$ .

*Demonstração.* (a) Note-se que  $\lambda^* = 1/2$  é equilíbrio se  $R(1/2) > 1$  ou se  $R(1/2) = 1$ .

Considere-se  $R(1/2) > 1$ :  $\lambda^* = 1/2$  é estável se  $|f'_d(1/2)| < 1$ . De facto,

$$\begin{aligned}
 |f'_d(1/2)| < 1 &\Leftrightarrow |1 - m_{j \rightarrow i}(R(1/2))| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left| 1 - \frac{R(1/2) - 1}{R(1/2) + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{R(1/2) + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow_{R(\lambda_t) \geq 0} \frac{2}{R(1/2) + 1} < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow R(1/2) > 1.
 \end{aligned}$$

(b) Como  $\lambda^* = 0$  é equilíbrio se  $R(0) < 1$  ou se  $R(0) = 1$ , considere-se  $R(0) < 1$ :

$\lambda^* = 0$  é estável se  $|f'_d(0)| < 1$ . De facto,

$$\begin{aligned}
 |f'_d(0)| < 1 &\Leftrightarrow |1 - m_{i \rightarrow j}(R(0))| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1 - R(0)}{R(0) + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{2R(0)}{R(0) + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow_{R(\lambda_t) \geq 0} \frac{2R(0)}{R(0) + 1} < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow R(0) < 1.
 \end{aligned}$$

□

A análise da estabilidade dos equilíbrios de dispersão, simétrica ou assimétrica, onde  $R(\lambda^*) = 1$  e  $f_d(\lambda_t)$  não é diferenciável, mas são finitos os limites à esquerda e direita de  $\lambda^*$ , requer a extensão do Teorema da Estabilidade Local, permitindo concluir:

**Proposição 4.2.2.** *Uma configuração com trabalhadores qualificados nas três regiões, sendo duas delas idênticas e uma diferente, é estável se e só se*

$$\min \left\{ -\frac{4}{\lambda^*}, -\frac{8}{1-2\lambda^*} \right\} < R'(\lambda^*) < 0.$$

*Demonstração.* Usando um método análogo à prova de Garrido-da-Silva *et al.* (2015), Lema 4.8, seja  $\lambda^*$  um ponto fixo que satisfaz  $R(\lambda^*) = 1$ . Então,

$$f'_d(\lambda^{*+}) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^{*+}} \frac{f_d(\lambda) - f_d(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} = 1 + \frac{1-2\lambda^*}{4} R'(\lambda^*),$$

$$f'_d(\lambda^{*-}) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^{*-}} \frac{f_d(\lambda) - f_d(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} = 1 + \frac{\lambda^*}{2} R'(\lambda^*).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f'_d(\lambda^{*+})| < 1 &\Leftrightarrow \left| 1 + \frac{1-2\lambda^*}{4} R'(\lambda^*) \right| < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1-2\lambda^*}{4} R'(\lambda^*) > -1 \wedge 1 + \frac{1-2\lambda^*}{4} R'(\lambda^*) < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow R'(\lambda^*) > -\frac{8}{1-2\lambda^*} \wedge R'(\lambda^*) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow R'(\lambda^*) \in \left( -\frac{8}{1-2\lambda^*}, 0 \right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} |f'_d(\lambda^{*-})| < 1 &\Leftrightarrow \left| 1 + \frac{\lambda^*}{2} R'(\lambda^*) \right| < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow R'(\lambda^*) \in \left( -\frac{4}{\lambda^*}, 0 \right). \end{aligned}$$

Tal é suficiente para garantir que  $f_d$  é Lipschitz com constante  $|K| < 1$  e, assim sendo, o equilíbrio é estável. A este respeito, veja-se o Lema 4.2.1.  $\square$

**Lema 4.2.1** (Garrido-da-Silva *et al.* (2015), Lema 4.9). *Seja  $f$  uma função Lipschitz com constante  $|K| < 1$  e  $x^*$  um ponto fixo de  $f$ . Então  $x^*$  é localmente assintoticamente estável para  $x_{t+1} = f(x_t)$ .*

A observação das Figuras 3.6, 4.1, 4.2 e 4.3 corrobora os resultados formalizados na presente secção. Para efeitos da sua ilustração, considerou-se: *suficientemente reduzidos* os valores  $\phi = 0.2$  e  $\phi = 0.25$ ; e *suficientemente elevados*  $\phi = 0.3$  e  $\phi = 0.5$ .

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ ,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, o equilíbrio de dispersão simétrica é *localmente assintoticamente estável* e a convergência é monótona, por ser  $0 < f'_d(1/3) < 1$  (Figura 4.2a). Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , a aproximação dá-se pela entrada de população qualificada nas regiões idênticas (Figura 4.1a). De modo análogo, para  $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$ , assiste-se à saída de trabalhadores qualificados das regiões idênticas com destino à região diferente, cuja dimensão mais reduzida lhe atribui um mercado concorrencial menos intenso (Figura 4.1b). Consequentemente, são *instáveis* os equilíbrios centro-periferia e aglomeração parcial.

Então, a intensificação da concorrência por meio da entrada de novas empresas nas regiões idênticas quando de pequena dimensão, promovida por um diferencial salarial positivo face à maior região (Figura 3.6a), prejudica o lucro das empresas instaladas, i.e., o vencimento dos trabalhadores, conduzindo a diminuição do rácio salarial (Figura 3.6b), de novo, à dispersão industrial.

Note-se que, quando existe, o equilíbrio de dispersão assimétrica  $\lambda^* = \lambda_d$  é *instável*, coexistindo com o ponto fixo  $\lambda^* = 0$ . Veja-se a Figura 4.2a para  $\phi = 0.25$ , que aponta para  $f'_d(\lambda_d) > 1$ . Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, \lambda_d[$ , presencia-se a saída (monótona) de trabalhadores qualificados das regiões idênticas até à sua completa desertificação em termos de setor industrial. Já para  $\lambda_0 \in ]\lambda_d, 1/3[$ , a entrada de novas empresas em  $i, k$  culmina, no longo prazo, com a dispersão simétrica da atividade económica industrial entre as três regiões (Figura 4.3).

- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, o equilíbrio de dispersão simétrica perde estabilidade e condições iniciais próximas deste ponto irão divergir monotonamente dele, na medida em que  $f'_d(1/3) > 1$  (Figura 4.2b). Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/3[$ , assiste-se à saída de trabalhadores qualificados das regiões idênticas, que se aglomeram, por inteiro, na região diferente, de maior dimensão. O equilíbrio centro-periferia é, por conseguinte, *estável* (Figura 4.1a). Veja-se que quando o mercado das regiões idênticas se caracteriza pela menor oferta de variedades industriais, as empresas aí ativas serão incentivadas a deslocalizar a sua produção para a região  $j$ , cuja maior dimensão proporciona superior rentabilidade e, por ser já suficientemente elevada a integração dos mercados, servem os consumidores por meio da exportação dos seus produtos para as regiões idênticas. Ora, quando existem duas grandes regiões, sai reforçado o incentivo à instalação nesses mercados, o que se explica pelo domínio das forças de ligação. Perante uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]1/3, 1/2[$ , a migração opera-se, por isso, no sentido inverso, levando à concentração de todo o setor industrial nas regiões idênticas. Surge como equilíbrio de longo-prazo a aglomeração parcial (Figura 4.1b).

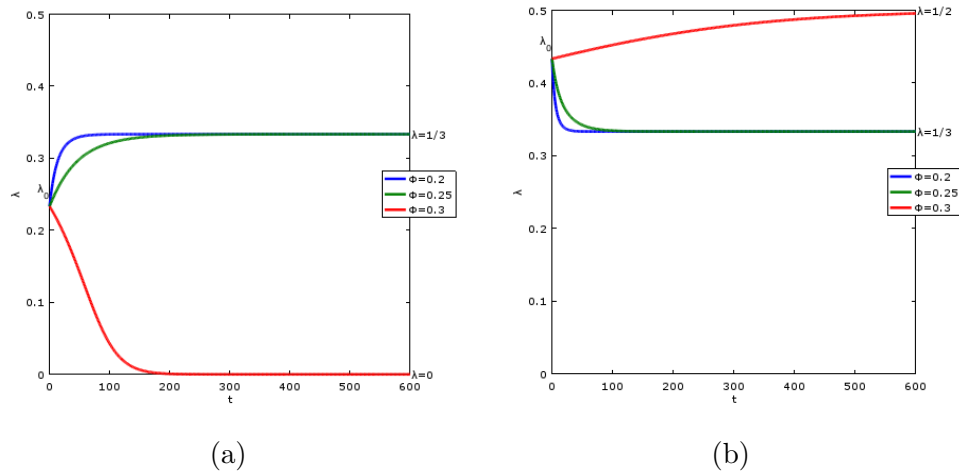


Figura 4.1: **Trajetória da solução de (4.6) para diferentes valores de  $\phi$  e  $\lambda_0$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica imposta por  $f_d$  em (4.6) para uma condição inicial: (a)  $\lambda_0 = 1/3 - \varepsilon$ ; (b)  $\lambda_0 = 1/3 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ , ao longo de  $t = 600$  instantes.

A Figura 4.4 representa os pontos de equilíbrio da dinâmica descrita por  $f_d$  em (4.6), em ordem a  $\phi$ . Inicia-se o sistema numa condição inicial próxima do equilíbrio de dispersão simétrica  $\lambda^* = 1/3$ , em (a) à esquerda, e em (b) à sua direita, para valores de  $\phi \in (0, 0.5]$ . Quando comparada com a Figura 3.10, a dinâmica apresenta-se bem comportada. Por ter sido obtida com recurso ao *software* Octave, torna-se importante referir que o traço que se observa entre os equilíbrios de dispersão simétrica e aglomeração se deve à mais lenta convergência no intervalo de  $\phi$  correspondente.

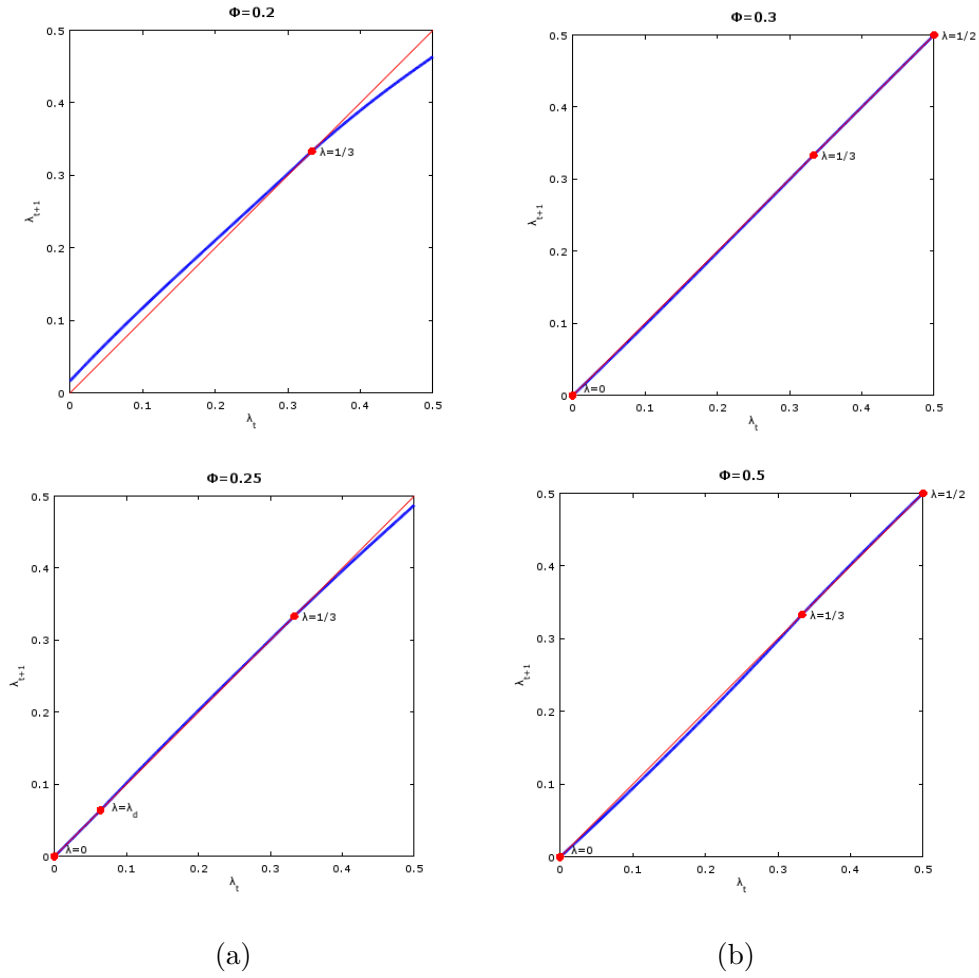


Figura 4.2: **Representação gráfica de  $f_d(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ .** Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , a linha a vermelho representa a função identidade e a sua interseção com o gráfico de  $f_d(\lambda_t)$  identifica um ponto de equilíbrio. Para valores de  $\phi$  suficientemente: (a) *reduzidos*,  $\lambda^* = 1/3$  é *estável*, podendo surgir, para certos valores dos parâmetros, o ponto fixo assimétrico  $\lambda^* = \lambda_d$ ; (b) *elevados*, são estáveis  $CP_i$  e  $S_i$ .



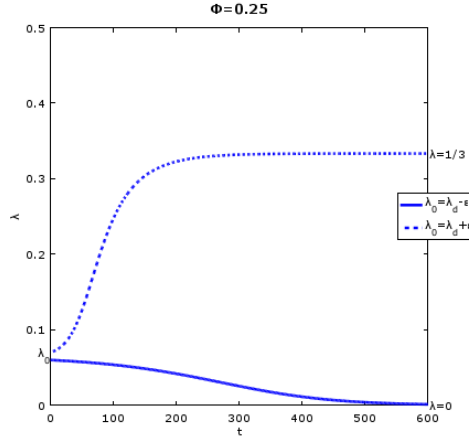


Figura 4.3: **Trajetória da solução de (4.6) para  $\phi = 0.25$  e  $\lambda_0$  próximo de  $\lambda_d$ .** Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , dada uma condição inicial  $\lambda_0 = \lambda_d - \varepsilon$ , com  $\varepsilon \simeq 0.005$ , observa-se, a traço cheio, a convergência da solução de (4.6) para o ponto fixo  $\lambda^* = 0$ , enquanto para uma condição inicial  $\lambda_0 = \lambda_d + \varepsilon$ , a trajetória, a tracejado, se aproxima do equilíbrio de dispersão simétrica. Assim se afere da *instabilidade* do ponto fixo assimétrico  $\lambda^* = \lambda_d$ .

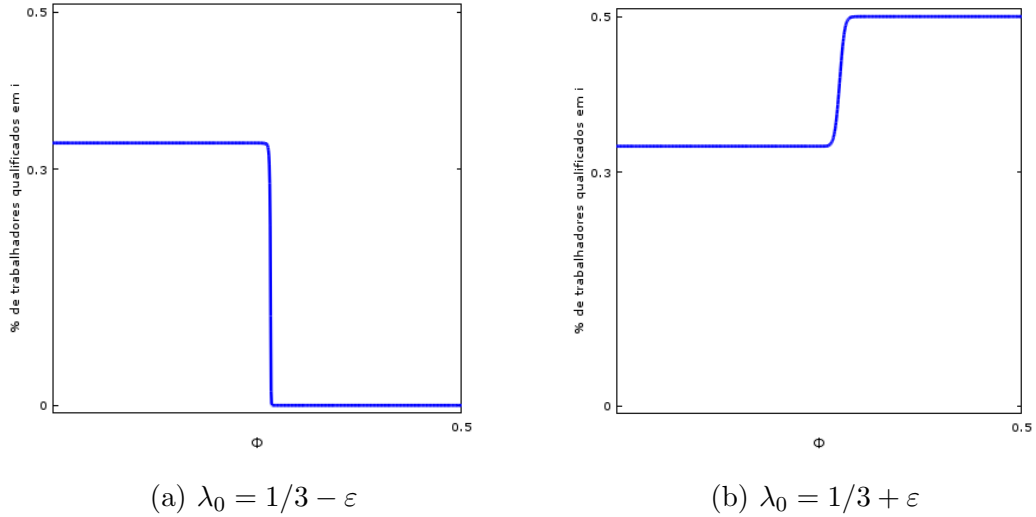


Figura 4.4: **Estados de equilíbrio em ordem a  $\phi$  para diferentes condições iniciais.**

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\varepsilon = 0.001$ , verifica-se que para níveis *suficientemente reduzidos* de  $\phi$ , a convergência processa-se para o ponto de equilíbrio de dispersão simétrica  $\lambda^* = 1/3$ . Para valores *suficientemente elevados*, converge para uma das configurações de aglomeração: equilíbrio centro-periferia em (a); aglomeração parcial em (b).

### 4.3 Uma região sem indústria

Em cada uma das arestas do triângulo  $R$ , é nula a percentagem de atividade económica industrial numa das três regiões, pelo que a migração de trabalho qualificado tem lugar em apenas duas delas. Função de uma única variável de estado, a percentagem de trabalhadores qualificados na região  $i$  no instante  $t + 1$ ,  $\lambda_{t+1} = f_b(\lambda_t)$ , corresponde a uma restrição imediata, sem demais alterações, de (4.1) ao caso em que  $\lambda_{k,t} = 0$ , e vem dada por

$$\lambda_{t+1} = f_b(\lambda_t) = \lambda_t + (1 - \lambda_t)m_{j \rightarrow i} - \lambda_t m_{i \rightarrow j}, \quad (4.9)$$

com  $\lambda_t \in [0, 1]$ . A percentagem  $m_{j \rightarrow i}$ , definida por (4.4), corresponde à entrada de trabalhadores qualificados na região  $i$  provenientes da região  $j$ . Correspondente ao movimento migratório oposto,  $m_{i \rightarrow j}$ , descrita por (4.5), confere a percentagem de trabalhadores qualificados da região  $i$  que migra para a região  $j$ . O rácio salarial  $R(\lambda_t)$  é agora dado por (3.24). Note-se que a função de migração descrita pela equação (4.9) pode ser escrita por meio de uma composição em ramos como a que se segue,

$$\lambda_{t+1} = f_b(\lambda_t) = \lambda_t + \begin{cases} (1 - \lambda_t)m_{j \rightarrow i} & \text{se } R(\lambda_t) \geq 1 \\ -m_{i \rightarrow j}\lambda_t & \text{se } R(\lambda_t) < 1 \end{cases}, \quad (4.10)$$

ou, em alternativa, pela substituição, em (4.10) dos máximos  $m_{j \rightarrow i}$  e  $m_{i \rightarrow j}$  pelas equações (4.4)-(4.5), obtendo-se, à semelhança de Garrido-da-Silva *et al.* (2015),

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \begin{cases} \frac{R(\lambda_t) - 1}{R(\lambda_t) + 1}(1 - \lambda_t) & \text{se } R(\lambda_t) \geq 1 \\ -\frac{1 - R(\lambda_t)}{R(\lambda_t) + 1}\lambda_t & \text{se } R(\lambda_t) < 1 \end{cases}.$$

### 4.3.1 Pontos de equilíbrio

Num contexto de uma região sem indústria, existe uma correspondência direta entre a entrada de população qualificada numa região  $i$  e a sua saída da região  $j$ , à semelhança do que sucedia na secção 4.2 relativamente à entrada e saída de mão-de-obra qualificada das regiões idênticas para a região diferente. Assim sendo, são igualmente dois os casos a detalhar, idênticos ao de Garrido-da-Silva *et al.* (2015).

*Caso 1.*  $R(\lambda_t) \geq 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$f_b(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = 1 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1] : R(\lambda^*) = 1\}.$$

*Caso 2.*  $0 \leq R(\lambda_t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{N}_0$

$$f_b(\lambda^*) = \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = 0 \vee \lambda^* \in \{\lambda_t \in [0, 1] : R(\lambda^*) = 1\}.$$

O primeiro dos casos considerados contempla a saída de trabalhadores da região  $j$  e correspondente entrada na região  $i$ . O segundo descreve a situação em que é nula a entrada de trabalhadores qualificados na região  $i$ , na medida em que o salário real que nela vigora no instante  $t$  é inferior ou, no limite, igual ao da região  $j$ . No que importa à existência de pontos fixos,  $\lambda^* = 0 \vee \lambda^* = 1$  são equivalentes, estabelecendo uma estrutura *centro-periferia*  $CP_i$ , na qual a atividade económica industrial se concentra numa única região enquanto for maior o salário real corrente por ela oferecido. A dispersão da atividade económica industrial entre duas das três regiões tem lugar quando  $R(\lambda^*) = 1$ , podendo ser *simétrica*, instalando metade da população qualificada em cada uma das regiões, ou *assimétrica*, com a repartição desigual dos trabalhadores qualificados entre as duas regiões que acolhem a manufatura. A *aglomeração parcial*<sup>7</sup>,  $\lambda^* = 1/2$ , é sempre solução, contrariamente às configurações assimétrica e centro-periferia.

---

<sup>7</sup>Recorde-se que, num contexto de uma região sem indústria, este equilíbrio corresponde à dispersão simétrica da atividade industrial entre duas regiões.

### 4.3.2 Estabilidade

O estudo da estabilidade dos pontos fixos, auxiliado pelo Teorema da Estabilidade Local, requer o cálculo da derivada de primeira ordem da função  $f_b(\lambda_t)$ , dada por

$$f'_b(\lambda_t) = 1 + \begin{cases} (1 - \lambda_t) m'_{j \rightarrow i} - m_{j \rightarrow i} & \text{se } R(\lambda_t) > 1 \\ -(\lambda_t m'_{i \rightarrow j} + m_{i \rightarrow j}) & \text{se } R(\lambda_t) < 1 \end{cases},$$

onde  $m'_{j \rightarrow i}$  e  $m'_{i \rightarrow j}$  são definidos por (4.8). A função não é diferenciável para  $R(\lambda_t) = 1$ , exceto quando  $\lambda_t = 1/2$ . Nesse caso, é dada por

$$f'_b(1/2) = 1 + \frac{R'(1/2)}{4}.$$

Em consequência, e de modo análogo quer ao estudo realizado na secção anterior, quer ao trabalho de Garrido-da-Silva *et al.* (2015), a avaliação da estabilidade dos pontos de equilíbrio centro-periferia pode ser feita recorrendo a  $f'_b(\lambda_t)$ , desde que estes não satisfaçam  $R(0) = R(1) = 1$ . A análise da estabilidade dos equilíbrios de dispersão, simétrica ou assimétrica, onde  $R(\lambda^*) = 1$ , requer, novamente, o recurso ao Lema 4.2.1.<sup>8</sup>

**Proposição 4.3.1** (Garrido-da-Silva *et al.*, 2015, Lema 4.4). *(a) A configuração centro-periferia com todos os trabalhadores qualificados concentrados na região  $i$ ,  $\lambda^* = 1$ , é estável se e só se  $R(1) > 1$ .*

*(b) A configuração centro-periferia com todos os trabalhadores qualificados concentrados na região  $j$ ,  $\lambda^* = 0$ , é estável se e só se  $0 < R(0) < 1$ .*

**Proposição 4.3.2** (Garrido-da-Silva *et al.* (2015), Lema 4.8). *Uma configuração com trabalhadores qualificados nas duas regiões que admitem indústria é estável se e só se*

$$\min \left\{ -\frac{4}{\lambda^*}, -\frac{4}{1 - \lambda^*} \right\} < R'(\lambda^*) < 0.$$

---

<sup>8</sup>As provas que acompanham, em Garrido-da-Silva *et al.* (2015), as seguintes proposições são idênticas às apresentadas na secção 4.2 e, por esse motivo, excluem-se na exposição procedente.

A observação das Figuras 4.5 e 4.6 produz informações que vão ao encontro dos resultados descritos na presente secção. Para efeitos da sua ilustração considerou-se: *suficientemente reduzidos*  $\phi = 0.1$  e  $\phi = 0.2$ ; *suficientemente elevados*  $\phi = 0.25$  e  $\phi = 0.35$ . Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ ,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, o equilíbrio de aglomeração parcial, que corresponde à dispersão simétrica entre as duas regiões recetíveis à indústria, afigura-se *estável*. Por ser  $0 < f'_b(1/2) < 1$ , a convergência é monótona (Figura 4.5a). Assim, dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ , assiste-se à entrada de trabalhadores qualificados na região  $i$  até que o equilíbrio  $\lambda^* = 1/2$  seja atingido (Figura 4.6a). Caso seja  $\lambda_0 \in ]1/2, 1[$ , a aproximação dá-se pela saída de trabalhadores qualificados da região  $i$  até as duas regiões atingirem a mesma dimensão (Figura 4.6b). Atuam os efeitos de dispersão, mais fortes em estágios iniciais do processo de integração económica ( $\phi$  reduzido,  $T$  elevado), no sentido da igualdade salarial.
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, o equilíbrio de aglomeração parcial perde estabilidade face às configurações centro-periferia, pelo que, condições iniciais perto do primeiro dos equilíbrios irão divergir monotonamente dele, na medida em que  $f'_b(1/2) > 1$  (Figura 4.5b). Dada uma condição inicial  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$ , o afastamento processa-se pela migração de trabalhadores qualificados da região  $i$  (Figura 4.6a), ao passo que, quando  $\lambda_0 \in ]0, 1/2[$  e a região  $i$  concentra um maior número de trabalhadores qualificados do que  $j$ , mais empresas serão atraídas a instalar-se no seu mercado, transformando-a, a prazo, num centro industrializado (Figura 4.6b). Assiste-se à preponderância dos efeitos de aglomeração quando a integração dos mercados está já suficientemente desenvolvida ( $\phi$  elevado,  $T$  reduzido).

Atente-se ainda na Figura 4.6. A convergência para uma estrutura centro-periferia processa-se tanto mais rápido, quanto maior  $\phi$ . Este facto explica-se pela menor importância que assume o local de produção em face de custos de transporte muito reduzidos e fundamenta a inexistência, para valores de  $\phi$  muito reduzidos, dos equilíbrios centro-periferia, por não serem estes lucrativamente recompensatórios.

A Figura 4.7 representa os pontos de equilíbrio da dinâmica imposta por  $f_b$  em (4.9), em ordem a  $\phi$ , para condições iniciais distintas. Inicia-se o sistema perto do equilíbrio de aglomeração parcial  $\lambda^* = 1/2$ , em (a) dada uma condição inicial  $\lambda_0$  ligeiramente inferior, e em (b) superior, para valores de  $\phi \in (0, 0.5]$ . Por comparação à Figura 3.16, a dinâmica afigura-se, mais uma vez, bem comportada.

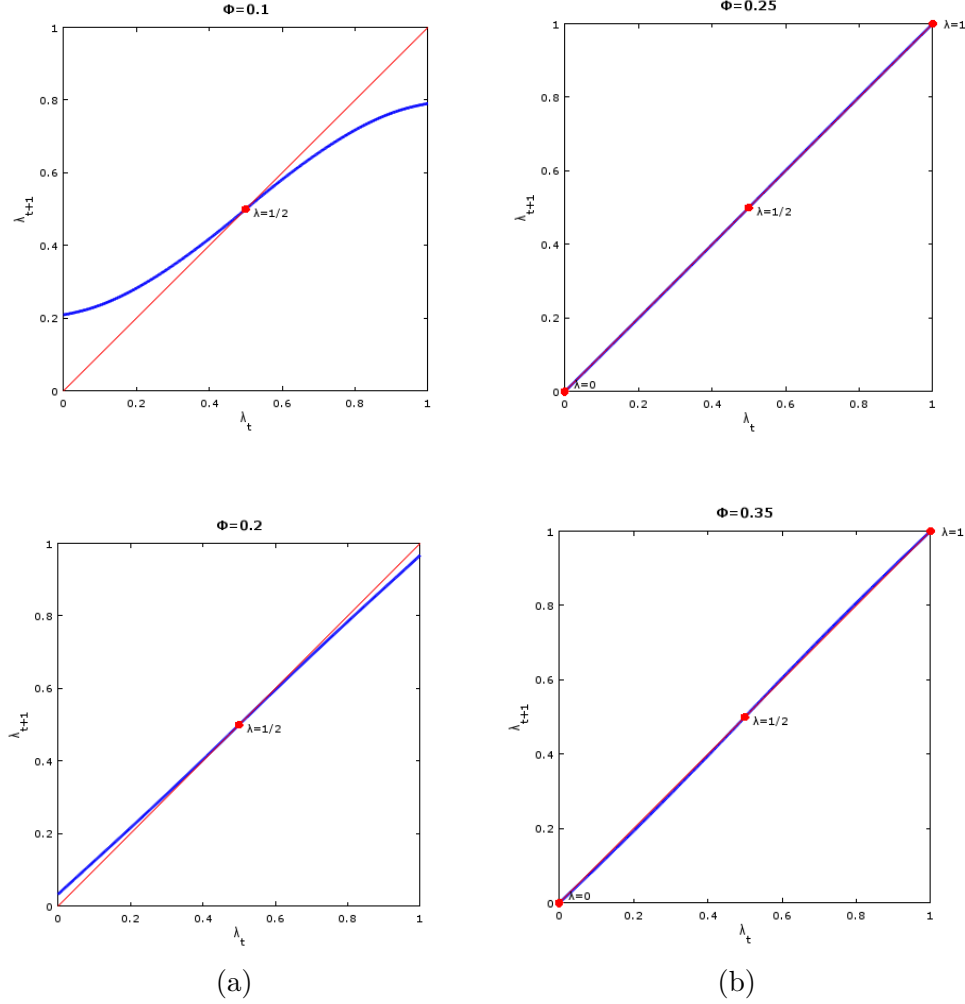


Figura 4.5: **Representação gráfica de  $f_b(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , a linha a vermelho representa a função identidade e a sua interseção com o gráfico de  $f_b(\lambda_t)$  identifica um ponto de equilíbrio. Para  $\phi$  *suficientemente reduzido* (a), o equilíbrio  $\lambda^* = 1/2$  é localmente assintoticamente estável, perdendo em (b) estabilidade para valores de  $\phi$  mais *elevados*, aquando do surgimento dos equilíbrios  $CP_i$ .

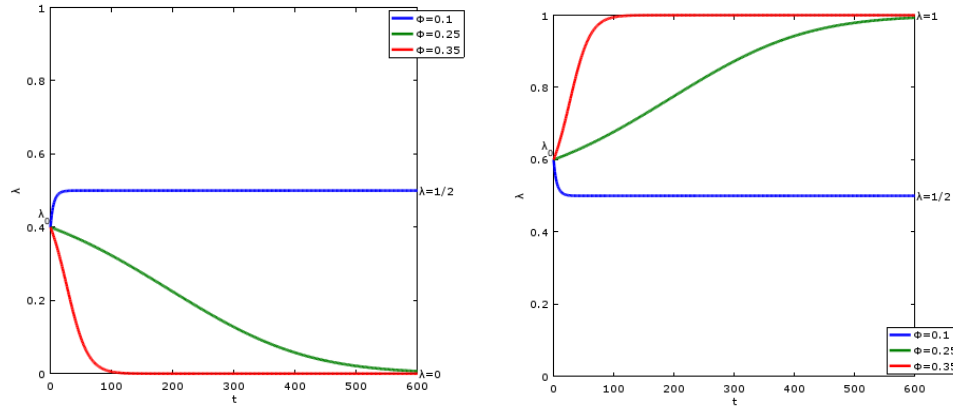


Figura 4.6: **Trajetória da solução de (4.9) para diferentes valores de  $\phi$  e  $\lambda_0$ .**

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $t = 600$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica imposta por  $f_b$  em (4.9) para uma condição inicial: (a)  $\lambda_0 = 1/2 - \varepsilon$ ; (b)  $\lambda_0 = 1/2 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.1$ . Salienta-se, entre os níveis de  $\phi$  elevados, a convergência tanto mais rápida para os equilíbrios  $CP_i$  quanto maior o grau de liberdade comercial.

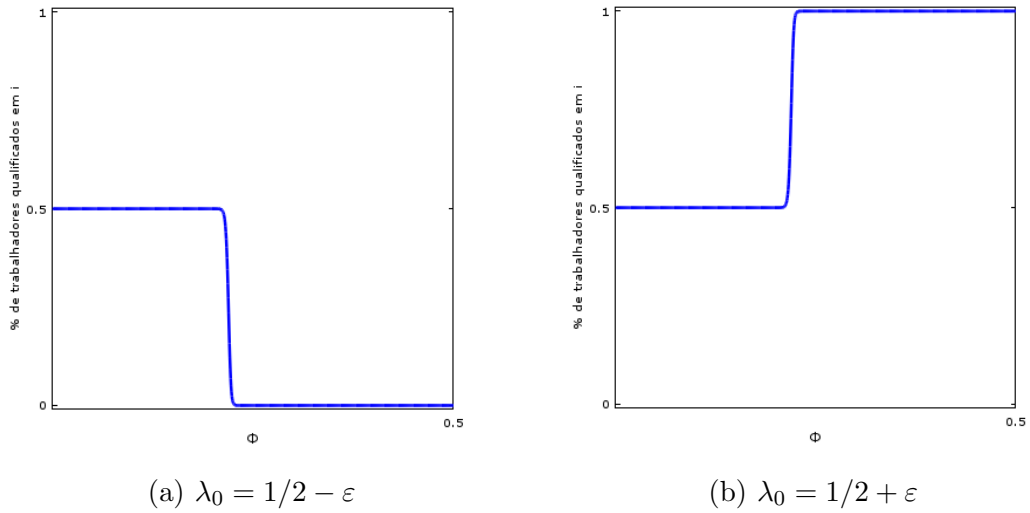


Figura 4.7: **Padrões de aglomeração em ordem a  $\phi$  para diferentes condições iniciais.**

Dados  $\mu = 0.45$ ,  $\sigma = 2.5$  e  $\varepsilon = 0.001$ , verifica-se que, para níveis *suficientemente reduzidos* de  $\phi$ , a convergência processa-se para o ponto de equilíbrio de aglomeração parcial  $\lambda^* = 1/2$ . Para valores *suficientemente elevados*, converge para um dos equilíbrios centro-periferia.

## 4.4 Três regiões com indústria

A problemática da simetria entre regiões introduzida na secção 4.2 tem, obviamente, implicações na dinâmica a que deve obedecer o modelo na presença de três regiões passíveis de industrialização. Neste âmbito, são duas as situações que convém distinguir:

1. Se duas das três regiões dispõem, no instante  $t$ , um mesmo salário real, este superior ao de uma terceira, então os trabalhadores qualificados da última região terão incentivo em abandoná-la, pois poderão usufruir de um maior bem-estar se o fizerem. Quanto ao destino, têm à sua disposição duas regiões, entre as quais, por se encontrarem em pé de igualdade relativamente ao vencimento que oferecem, escolherão indiferentemente. À semelhança do referido aquando de duas regiões idênticas, metade do total migratório deve instalar-se em cada uma delas.

Suponha-se, a título exemplificativo, que  $\omega_{i,t} = \omega_{j,t} > \omega_{k,t}$ . Haverá, portanto, uma percentagem de trabalhadores qualificados de  $k$  que irá migrar, no final do instante  $t$ , para as regiões  $i, j$ , mantendo as empresas instaladas nestas regiões a sua residência no período seguinte. Sendo  $R_{ij,t} = 1$ , não haverá lugar a movimentações entre as regiões  $i$  e  $j$ , pelo que  $m_{j \rightarrow i} = m_{i \rightarrow j} = 0$ . Já rácios salariais  $R_{ik,t} > 1$  e, em consequência,  $R_{jk,t} = \frac{R_{ik,t}}{R_{ij,t}} > 1$ , implicam  $m_{k \rightarrow i} = m_{k \rightarrow j} \Leftrightarrow \frac{R_{ik,t}-1}{R_{ik,t}+1} = \frac{R_{jk,t}-1}{R_{jk,t}+1}$ . Assim, as percentagens de trabalhadores qualificados em cada uma das regiões igualam, no instante  $t+1$ ,

$$\Leftrightarrow_{m_{k \rightarrow i} = m_{k \rightarrow j}} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{i,t+1} = \lambda_{i,t} + \frac{1}{2} \lambda_{k,t} m_{k \rightarrow i} \\ \lambda_{j,t+1} = \lambda_{j,t} + \frac{1}{2} \lambda_{k,t} m_{k \rightarrow j} \\ \lambda_{k,t+1} = \lambda_{k,t} - \lambda_{k,t} \left( \frac{1}{2} m_{k \rightarrow i} + \frac{1}{2} m_{k \rightarrow j} \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{i,t+1} = \lambda_{i,t} + \frac{1}{2} \lambda_{k,t} m_{k \rightarrow i} \\ \lambda_{j,t+1} = \lambda_{j,t} + \frac{1}{2} \lambda_{k,t} m_{k \rightarrow i} \\ \lambda_{k,t+1} = \lambda_{k,t} - \lambda_{k,t} m_{k \rightarrow i} \end{array} \right.$$



Este corresponde ao primeiro<sup>9</sup> de três casos possíveis:

$$\begin{aligned}
R_{ij,t} &= 1 \wedge R_{ik,t} > 1 \ (\Leftrightarrow R_{jk,t} > 1); \\
R_{ij,t} &> 1 \wedge R_{ik,t} = 1 \ (\Leftrightarrow R_{jk,t} < 1); \\
R_{ij,t} &< 1 \wedge R_{jk,t} = 1 \ (\Leftrightarrow R_{ik,t} < 1).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Note-se que pode assistir-se tanto à entrada, na região  $i$ , de 50% da população qualificada que decide abandonar a região  $j$  ou  $k$ , como à saída de 50% de mão-de-obra qualificada da região  $i$  para cada uma das outras duas regiões. Diferentemente da secção 4.2, onde a equação às diferenças  $\lambda_{t+1} = f_d(\lambda_t)$ , dada por (4.6), descreve a percentagem de trabalhadores qualificados nas regiões idênticas e, por isso, a acontecer, a saída de trabalhadores destina-se a uma única região (a região diferente), no presente contexto, a emigração, quando se dá, pode suceder para uma única região ou para duas, se estas oferecem igual remuneração, desde que superior à da região de partida. Assim, não é suficiente multiplicar a taxa de entrada por  $1/2$ , obrigando à repetição do processo no que à saída de trabalhadores da região diz respeito, por foma a acautelar as duas eventualidades. É o que se faz no primeiro dos ramos da função  $F$ , em (4.12).

2. Caso não se verifique nenhuma das situações contempladas em (4.11), a dinâmica é dada pela equação às diferenças geral (4.1).

O cumprimento dos dois requisitos anteriores estabelece

$$\lambda_{i,t+1} = F_i(\lambda_{i,t}, \lambda_{j,t}) = \lambda_{i,t} + \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} m_{j \rightarrow i} - \frac{1}{2} \lambda_{i,t} \sum_{j=1}^3 m_{i \rightarrow j}, & \text{se (4.11)} \\ \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,t} m_{j \rightarrow i} - \lambda_{i,t} \sum_{j=1}^3 m_{i \rightarrow j}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.12}$$

---

<sup>9</sup>A interpretação dos dois últimos casos é, em tudo, idêntica à do primeiro.

Nas subsecções seguintes, alude-se ao comportamento das soluções da dinâmica descrita por  $F$  em (4.12) por intermédio de diferentes condições iniciais<sup>10</sup> e graus de integração da economia ( $\phi$ ) crescentes. Em conformidade com o referido na secção 3.5, os pontos fixos identificados nas secções 4.2 e 4.3 correspondem a pontos fixos de (4.12). Basta notar que:

1. Se  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t} > \omega_{k,t}$ , os trabalhadores qualificados das regiões  $j$  e  $k$  serão atraídos à região  $i$ , resultando numa estrutura centro-periferia  $CP_i$ ;<sup>11</sup>
2. Se  $\omega_{i,t} = \omega_{j,t} > \omega_{k,t}$ , os trabalhadores qualificados da região  $k$  que decidem migrar repartem-se entre as regiões  $i$  e  $j$ , surgindo o equilíbrio de aglomeração parcial  $S_i$ ;
3. Se  $\omega_{i,t} = \omega_{j,t} = \omega_{k,t}$ , a indústria dispersa-se entre as três regiões, incluindo  $S_s$ .

#### 4.4.1 Equilíbrio de dispersão simétrica

Partindo de uma condição inicial próxima do equilíbrio  $S_s = (1/3, 1/3, 1/3)$ , obtiveram-se as trajetórias que constam da Figura 4.8. Para efeitos da sua representação considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido* (Figura 4.8a); e  $\phi = 0.3$  como *suficientemente elevado* (Figura 4.8b). Da sua observação infere-se que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, condições iniciais próximas do equilíbrio de dispersão simétrica irão convergir monotonamente para ele. Isto posto, um grau de liberdade comercial diminuto promove a dispersão da indústria entre as regiões, preservando a importância da localização da unidade produtiva na satisfação dos consumidores locais.
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, a correspondente diminuição dos custos de transporte, conducente a uma maior integração económica entre as regiões, favorece (desencoraja) a aglomeração (dispersão) da atividade económica industrial.

<sup>10</sup>Recorde-se que a estabilidade dos equilíbrios  $S_i$  e  $CP_i$  é preservada por permutação das regiões (Gaspar *et al.*, 2013, p. 8).

<sup>11</sup>Qualquer outra ordenação entre o valor dos salários reais resultaria no mesmo tipo de equilíbrio. Equivalentemente, o mesmo resultado surge para  $\omega_{i,t} > \omega_{j,t} = \omega_{k,t}$ .

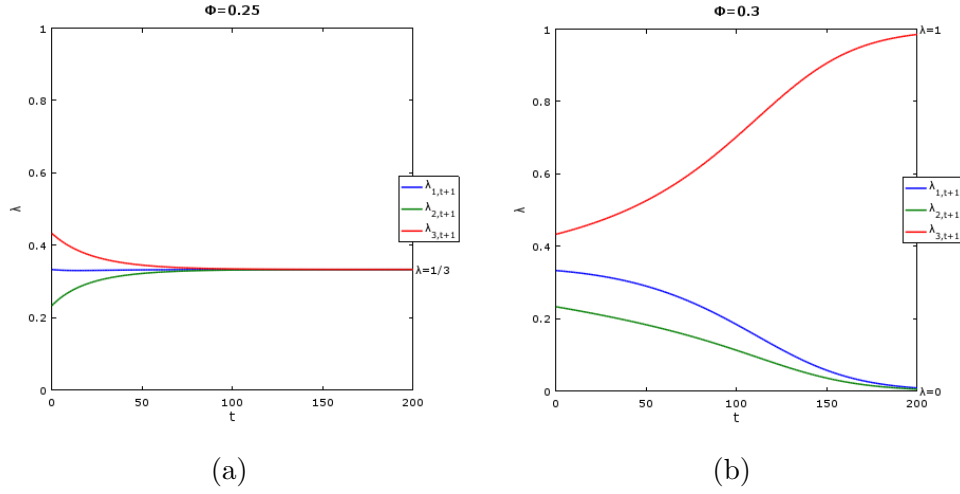


Figura 4.8: **Trajetória da solução de (4.12) com condições iniciais próximas de  $S_s$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para condições iniciais próximas do equilíbrio  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , com  $\lambda_{1,0} = 1/3$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/3 - \varepsilon$ ,  $\lambda_{3,0} = 1/3 + \varepsilon$  e  $\varepsilon = 0.1$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução de (4.12) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b)  $\phi = 0.3$ , ao longo de  $t = 200$  instantes.

#### 4.4.2 Equilíbrio de aglomeração parcial

Seja agora a análise conduzida por uma condição inicial suficientemente próxima do equilíbrio  $S_i = (1/2, 1/2, 0)$ . Obtiveram-se as trajetórias que constam da Figura 4.9. Para efeitos da sua representação considerou-se:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido* (Figura 4.9a);  $\phi = 0.3$  como *suficientemente elevado* (Figura 4.9b). Constatase que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, há uma convergência da solução de (4.12) para o equilíbrio de dispersão simétrica, *estável*. Contudo, a simulação numérica para diferentes valores de  $\phi$ , ora reduzidos, ora elevados, indicia que a aglomeração parcial emerge apenas para os níveis mais elevados. O ponto  $S_i$  não é, de resto, um equilíbrio de (4.12) para  $\phi = 0.25$ , como demonstra a Figura 4.10a. De acordo com a Definição 3.2.2, se em  $t = 0$  a economia se encontra num *steady-state*, então, na ausência de choques, permanecerá nele nos períodos seguintes. Contudo, na situação representada, verifica-se um afastamento sucessivo de  $(1/2, 1/2, 0)$  e aproximação ao equilíbrio de dispersão simétrica. Olhe-se, agora, a Figura 4.10b,

desenhada para o mesmo valor de  $\phi$ . Perante a desertificação de setor industrial na região 3 no instante inicial, testemunha-se a entrada de trabalhadores qualificados na região em períodos seguintes, provando-se, deste modo, que uma região sem indústria em  $t = 0$  é capaz de atrair industriais nos instantes seguintes, diferentemente do que consideram Commendatore e Kubin (2013), mas de acordo com os pressupostos que usam na construção da dinâmica de migração.

- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, a trajetória da solução de (4.12) com condições iniciais próximas de  $S_i$  diverge monotonamente do equilíbrio de aglomeração parcial, desenrolando-se, desta feita, a convergência para o equilíbrio centro-periferia, que assume a condição de *estável*, em detrimento dos restantes. Assim, a exploração numérica sugere, como em Gaspar *et al.* (2013) que, quando existe, o equilíbrio de aglomeração parcial é *instável* para todos os valores dos parâmetros.

#### 4.4.3 Equilíbrio centro-periferia

Considerando uma condição inicial próxima do equilíbrio  $CP_i = (0, 0, 1)$ , obtiveram-se as trajetórias que constam da Figura 4.11. Para efeitos da sua representação considerou-se, como habitual:  $\phi = 0.25$  como *suficientemente reduzido* (Figura 4.11a);  $\phi = 0.3$  como *suficientemente elevado* (Figura 4.11b). Conclui-se que,

- para  $\phi$  *suficientemente reduzido*, a solução converge para o equilíbrio de dispersão simétrica, afastando-se do equilíbrio centro-periferia. Note-se que, para certos graus (inferiores) de liberdade comercial, uma configuração do tipo  $CP_i$  não é um ponto fixo de (4.12). Veja-se, a este respeito, a Figura 4.12. Na situação representada, há um afastamento sucessivo de  $F(\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \lambda_{3,0}) = (0, 0, 1)$  até à repartição equitativa da indústria entre as três regiões e permanência nesse estado.
- para  $\phi$  *suficientemente elevado*, o equilíbrio centro-periferia é *estável*, pois os índices de preços mais elevados que se fazem sentir nas regiões que não produzem variedades industriais acentuam os diferenciais salariais (Gaspar *et al.*, 2013).

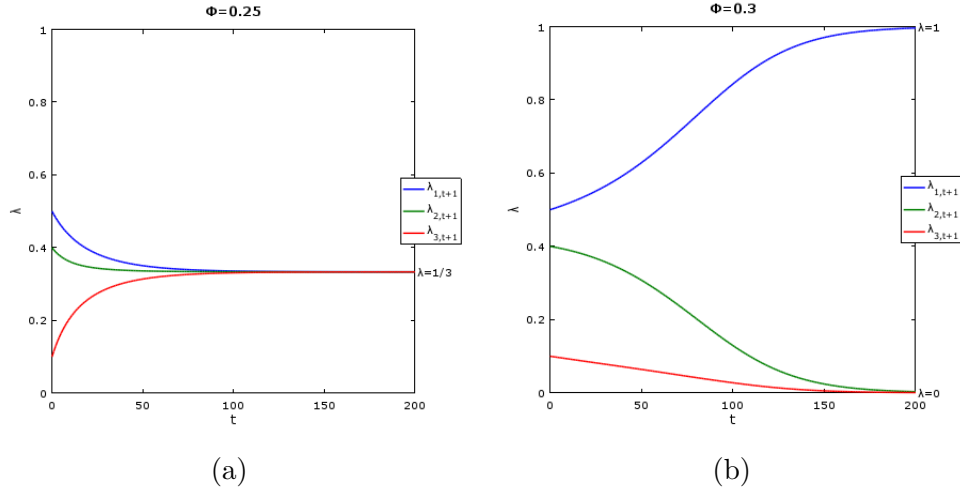


Figura 4.9: **Trajetória da solução de (4.12) com condições iniciais próximas de  $S_i$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para condições iniciais próximas do equilíbrio  $(1/2, 1/2, 0)$ , com  $\lambda_{1,0} = 1/2$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/2 - \varepsilon$ ,  $\lambda_{3,0} = \varepsilon$  e  $\varepsilon = 0.1$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução de (4.12) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b)  $\phi = 0.3$ , ao longo de  $t = 200$  instantes.

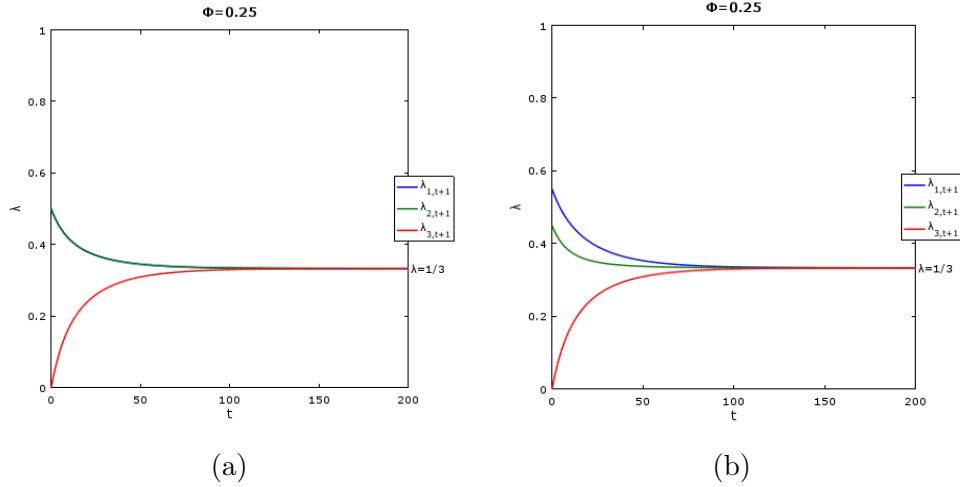


Figura 4.10: **Trajetória da solução de (4.12) para  $\phi = 0.25$  e diferentes  $\lambda_0$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução da dinâmica imposta por  $F$  em (4.12) para  $\phi = 0.25$ , ao longo de  $t = 200$  instantes, (a) dada uma condição inicial coincidente com  $S_i = (1/2, 1/2, 0)$ ; (b) para as condições iniciais  $\lambda_{1,0} = 1/2 + \varepsilon$ ,  $\lambda_{2,0} = 1/2 - \varepsilon$ ,  $\lambda_{3,0} = 0$ , com  $\varepsilon = 0.1$ . Prova-se que: (a) o equilíbrio de aglomeração parcial não existe para os valores dos parâmetros considerados; (b) uma região sem indústria em  $t = 0$  é capaz de atrair trabalhadores qualificados nos períodos seguintes.

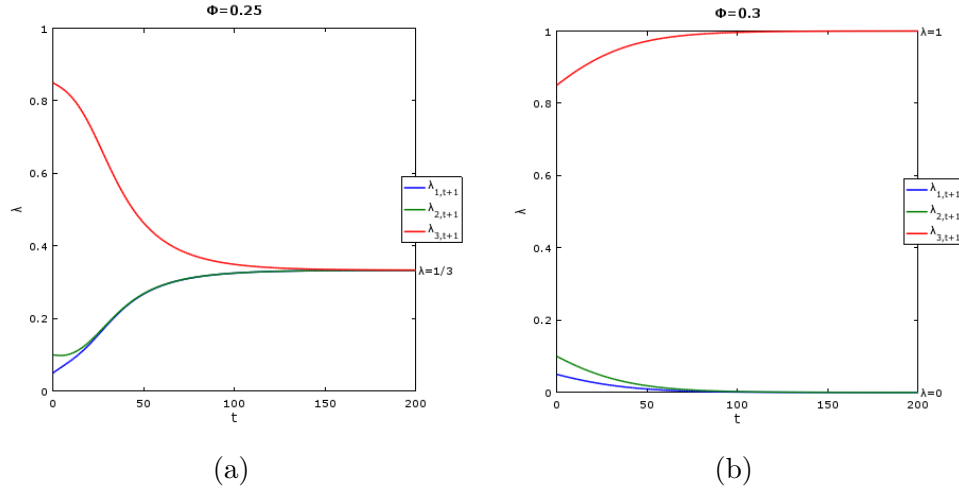


Figura 4.11: **Trajetória da solução de (4.12) com condições iniciais próximas de  $CP_i$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para condições iniciais próximas do equilíbrio  $(0, 0, 1)$ , com  $\lambda_{1,0} = \varepsilon$ ,  $\lambda_{2,0} = 2\varepsilon$ ,  $\lambda_{3,0} = 1 - 3\varepsilon$  e  $\varepsilon = 0.05$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução de (4.12) para: (a)  $\phi = 0.25$ ; (b)  $\phi = 0.3$ , ao longo de  $t = 200$  instantes.

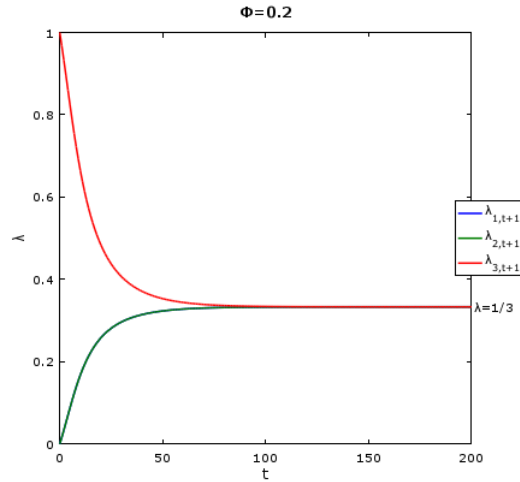


Figura 4.12: **Trajetória da solução de (4.12) com início no equilíbrio  $(0, 0, 1)$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para as condições iniciais  $\lambda_{1,0} = \lambda_{2,0} = 0$ ,  $\lambda_{3,0} = 1$ , tem-se o conjunto de pontos percorridos pela solução de (4.12) para  $\phi = 0.2$  ao longo de  $t = 200$  instantes. Prova-se que o ponto  $(0, 0, 1)$  não é, para os parâmetros considerados, um ponto de equilíbrio da dinâmica imposta por  $F$  em (4.12).

## 5 Conclusão

A resposta às questões formuladas na Introdução e que motivaram o desenvolvimento desta dissertação apresenta-se no Capítulo 4. A primeira questão pretendia averiguar a existência de dinâmicas de migração discretas, num modelo centro-periferia com três regiões, que fossem simultaneamente cumpridoras dos pressupostos económicos enunciados no Capítulo 2 e inviabilizadoras do aparecimento de caos. Ao mesmo tempo, procurava-se a reprodução dos homólogos resultados em tempo contínuo propostos por Gaspar *et al.* (2013). A investigação tomou como ponto de partida o modelo dinâmico de Commendatore *et al.* (2015b), do qual se faz uma detalhada descrição no Capítulo 3. A exposição então realizada vai além do trabalho original no estabelecimento de relações entre as variáveis e o comportamento dos agentes em função dos parâmetros, permitindo uma compreensão global sobre as suas deslocações em resposta ao ambiente económico vigente, este mormente condicionado pelo grau de integração dos mercados  $\phi$ . A criação dos múltiplos cenários foi auxiliada pelo *software* computacional MATLAB/Octave. Deu-se conta do complexo comportamento exibido pelas soluções quando o modelo entra no regime caótico, que se refere como sendo gerado para valores *muito reduzidos* de  $\phi$ , correspondentes a estágios demasiado precoces do processo de integração económica dos mercados mundiais, operado pela progressiva redução dos custos de transporte  $T$ .

Isto posto, prosseguiu-se para a efetiva construção da função de migração alternativa, apoiada pelo trabalho de Garrido-da-Silva *et al.* (2015). O primeiro passo foi estabelecer as características a que tal dinâmica deveria obedecer, representando os possíveis cenários de movimentação dos trabalhadores qualificados em resposta aos incentivos económicos, onde o seu poder de compra se assume fulcral. O segundo passo

consistiu em expor a efetiva equação às diferenças em que assenta a lei de migração, dada em (4.1) por  $\lambda_{i,t+1} = F_i(\lambda_{i,t}, \lambda_{j,t})$ , onde as percentagens de trabalhadores qualificados que entram ou saem da região  $i$  se definem pela diferença entre os salários reais quando comparadas as regiões de partida e chegada. Este diferencial é normalizado pela correspondente soma, vindo expresso em termos de um rácio salarial. Desta forma garantiu-se, como em Garrido-da-Silva *et al.* (2015), que se encontram as percentagens de entrada e saída no intervalo  $[0, 1]$ . Por consequência, assegura-se  $0 \leq \lambda_{i,t+1} \leq 1$  sem a obrigação de recorrer a uma função de ajustamento do tipo de  $Z$ , dada por (3.5). Seguiu-se a restrição da dinâmica de migração aos espaços invariantes, obtendo-se duas aplicações unidimensionais:  $f_d$  e  $f_b$ , respetivamente determinadas pelas equações (4.6) e (4.9) e correspondentes, nesta ordem, às medianas e arestas do triângulo  $R$  ou simplex. Nestes espaços revelou-se uma forma funcional idêntica à de Garrido-da-Silva *et al.* (2015) nas arestas e de notória semelhança nas medianas. No último dos casos, a saída de população qualificada de uma região (diferente) para duas (idênticas), quando estas oferecem um bem-estar superior, mensurado pelo vencimento real, obrigou a um ajuste da função  $F$  em (4.1), que teve também implicações quando consideradas três regiões com indústria, conduzindo à equação (4.12). Analiticamente, concluiu-se a manutenção dos equilíbrios de dispersão, simétrica e assimétrica, e aglomeração, parcial ou total, por comparação ao Capítulo 3. Salientou-se que os equilíbrios de aglomeração surgem apenas quando existe uma região que oferece um salário real superior às restantes, por oposição ao trabalho de Commendatore *et al.* (2015b), onde gozavam de independência, fruto da própria configuração do modelo, face aos parâmetros considerados. Testemunhou-se, adicionalmente, a entrada de trabalhadores qualificados numa região inicialmente sem indústria, provando-se ser atrativa em períodos seguintes, diferentemente do estabelecido por Commendatore e Kubin (2013). Resumiram-se igualmente as condições que devem satisfazer os rácios salariais por forma a serem estáveis os inerentes pontos fixos, para as funções  $f_d$  em (4.6) e  $f_b$  em (4.9), dependentes de uma única variável de estado. Porém, a bidimensionalidade de  $F$  em (4.12) e a extrema complexidade funcional das equações inerentes à sua construção obrigou a um estudo



qualitativo essencialmente assente na simulação numérica quando nos encontramos fora dos espaços invariantes. Tal como em Gaspar *et al.* (2013), aferiu-se numericamente que a aglomeração parcial não é sustentável num contexto de três regiões com indústria, contrariamente ao observado aquando de duas regiões idênticas.

Terminado o estudo qualitativo, respondeu-se à segunda das questões para três diferentes casos e pela ulterior disposição: duas regiões idênticas; uma região sem indústria; e três regiões com indústria. Relacionou-se esta com a primeira interrogação no que importa ao confronto dos resultados obtidos com os de Gaspar *et al.* (2013). A simulação computacional permitiu assinalar a reconhecida relação monótona entre os custos de transporte e a repartição da atividade económica industrial entre as regiões: em estágios iniciais do processo de integração económica dos mercados [ $\phi(T)$  *suficientemente reduzido (elevado)*], as forças de dispersão prevalecem sobre as de aglomeração, fazendo valer como equilíbrio de longo-prazo a dispersão simétrica da atividade económica industrial pelas três regiões; por oposição, em fases mais desenvolvidas [ $\phi(T)$  *suficientemente elevado (reduzido)*] contemplou-se a predominância das forças de ligação, conducente à aglomeração das atividades económicas em poucos lugares.

Com esta dissertação contribui-se para o esclarecimento da relação entre a dinâmica de migração quando se toma o tempo variando de forma discreta e contínua. Como resultado da investigação desenvolvida, invalida-se, como desejado, a hipótese de que a ocorrência de caos determinístico é uma característica intrínseca à discretização do modelo centro-periferia com três regiões, preservando-se as conclusões de tempo contínuo apresentadas sob afins pressupostos económicos. Os resultados esclarecem sobre os padrões de aglomeração formados entre três regiões e vão de encontro à realidade empírica, embora se reconheçam os trabalhos de Commendatore e Kubin (2013) e Commendatore *et al.* (2015b) como oferecendo uma análise complementar no que respeita ao estudo das propriedades de estabilidade global e cenários de bifurcação.

Investigações futuras poderão partir da generalização do modelo edificado para  $n$  regiões, ambicionando-se uma explicação da localização das atividades económicas por meio dos modelos de NEG tanto mais real quanto a efetivamente observada.

# Apêndice

## A Ilustrações Complementares

Como referido na secção 3.4, a equivalência qualitativa exibida pelos resultados da representação gráfica das funções (3.17)-(3.21), relativas ao caso de uma região sem indústria, e os demonstrados na secção 3.3, com respeito à presença de duas regiões idênticas, levou à omissão dos mesmos na exposição realizada. Contudo, estes são aqui ilustrados, podendo o leitor comprovar a semelhança entre os aspetos identificados.

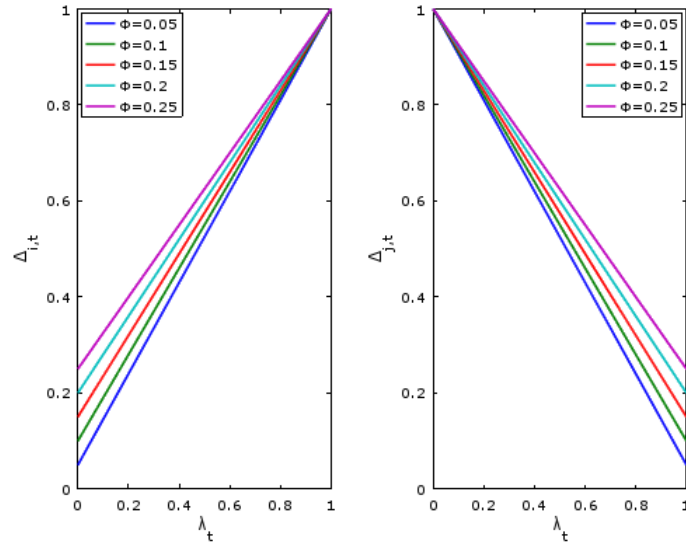


Figura A.1: **Representação gráfica de  $\Delta_{i,t}$  e  $\Delta_{j,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra, à esquerda, a variável  $\Delta_{i,t}$ , dada por (3.17). Respeita à apreciação que um produtor residente na região  $i$  faz relativamente ao potencial oferecido pelos mercados doméstico e exterior, sendo o último máximo para  $\lambda = 1$ . O mesmo tipo de interpretação é feito à direita para a região  $j$ .

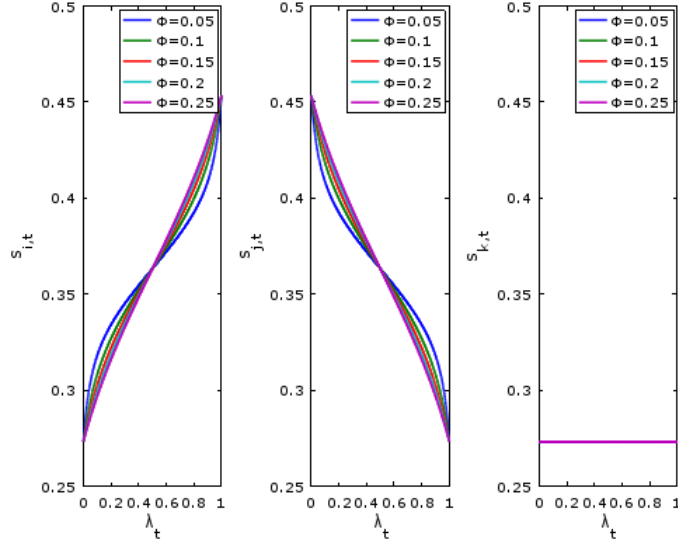


Figura A.2: **Representação gráfica de  $s_{i,t}$ ,  $s_{j,t}$  e  $s_{k,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra, tendo em conta as expressões em (3.18)-(3.19), a fração da despesa total que é realizada em cada região, desta forma refletindo o poder de compra dos trabalhadores que nela residem. É constante a variável  $s_{k,t}$  por ser nula a percentagem de trabalhadores qualificados ativos na região. Note-se que as regiões  $i, j$  contribuem com frações afins para a despesa total quando  $\lambda = 1/2$ .

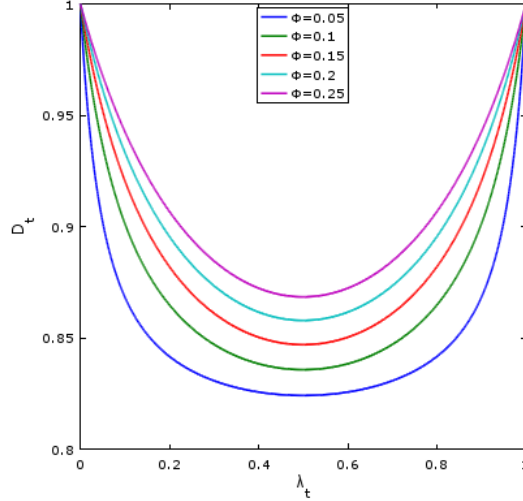
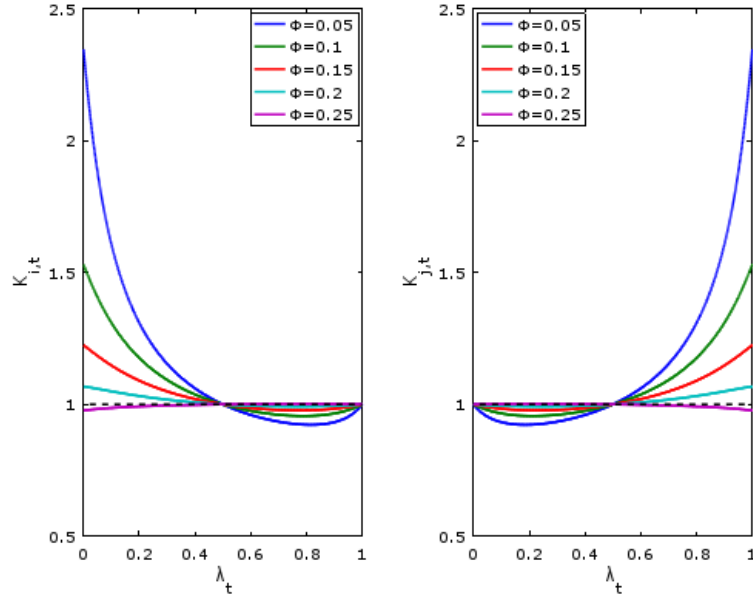
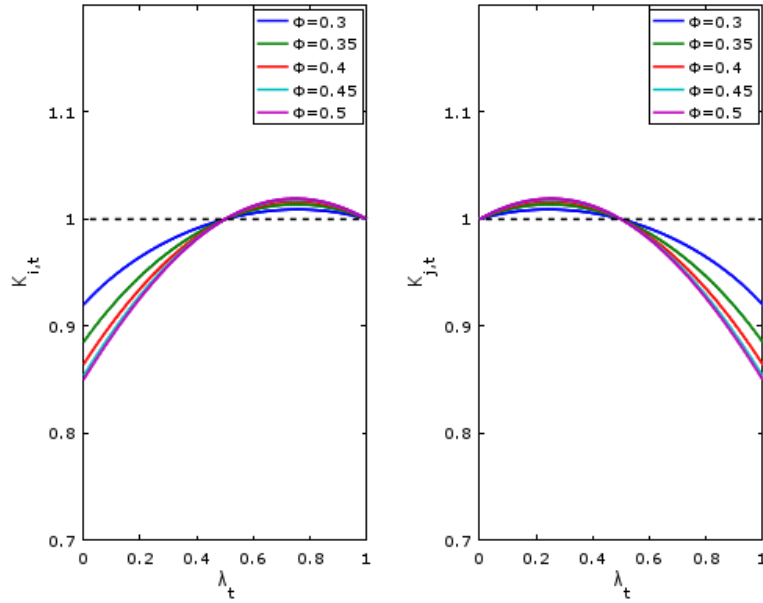


Figura A.3: **Representação gráfica de  $D_t$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o salário médio real, dado por (3.20), que é crescente com a redução dos custos de transporte e, para um dado  $\phi$ , mínimo quando as duas regiões onde existe setor industrial concentram metade da população qualificada.



(a)  $0.05 \leq \phi \leq 0.25$



(b)  $0.3 \leq \phi \leq 0.5$

Figura A.4: **Representação gráfica de  $K_{i,t}$  e  $K_{j,t}$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra, à esquerda (direita), o rácio entre o salário real de um trabalhador qualificado ativo em  $i$  ( $j$ ) e a remuneração média da economia, dado por (3.21). Quando a região alberga uma menor percentagem de trabalhado qualificado, para: (a)  $\phi$  suficientemente reduzido,  $K > 1$ ; (b)  $\phi$  suficientemente elevado,  $K < 1$ .

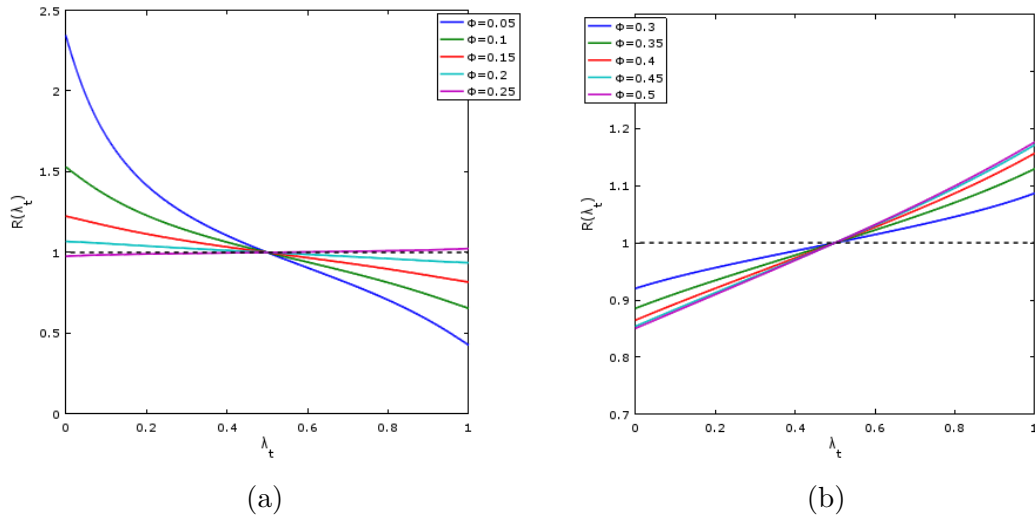


Figura A.5: **Representação gráfica de  $R(\lambda_t)$  para diferentes valores de  $\phi$ .**

Dados  $\mu = 0.45$  e  $\sigma = 2.5$ , para cada valor de  $\phi$  selecionado, a figura ilustra o rácio entre o salário real das duas regiões em que se verifica atividade económica industrial, dado por (3.24). A linha a tracejado preto separa, acima, as percentagens  $\lambda$  para as quais, dado  $\phi$ ,  $\omega_i > \omega_j$ . Abaixo desta linha, o maior bem-estar oferecido na região  $j$  origina a si a migração de mão-de-obra qualificada proveniente da região  $i$ . Quando a região detém um menor número de trabalhadores qualificados, para: (a)  $\phi$  *suficientemente reduzido*,  $R > 1$ ; (b)  $\phi$  *suficientemente elevado*,  $R < 1$ .

## Bibliografia

- [1] Baldwin, R. (2001), “Core-periphery model with forward-looking expectations”, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, N<sup>o</sup> 1, pp. 21-49.
- [2] Castro, S. B., Correia-da Silva, J. e Mossay, P. (2012), “The core-periphery model with three regions and more”, *Papers in Regional Science*, Vol. 91, N<sup>o</sup> 2, pp. 401-418.
- [3] Commendatore, P., Currie, M. e Kubin, I. (2008), “Footloose Entrepreneurs, Taxes and Subsidies”, *Spatial Economic Analysis*, Vol. 3, N<sup>o</sup>1, pp. 115-141.
- [4] Commendatore, P. e Kubin, I. (2013), “A three-region new economic geography model in discrete time: preliminary results on global dynamics”, em *Global Analysis of Dynamic Models in Economics, Finance and Social Sciences*, G.-I. Bischi, C. Chiarella e I. Sushko (editores), Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 159-184.
- [5] Commendatore, P., Filoso, V., Grafeneder-Weissteiner, T. e Kubin, I. (2015a), “Towards a multiregional NEG framework: comparing alternative modelling strategies”, em *Complexity and Geographical Economics: Topics and Tools*, P. Commendatore, S. Kayam e I. Sushko (editores), Springer International Publishing, pp. 13-50.
- [6] Commendatore, P., Kubin, I. e Sushko, I. (2015b), “Typical bifurcation scenario in a three region identical new economic geography model”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 108, pp. 63–80.

- [7] Commendatore, P., Kubin, I., Mossay, P. e Sushko, I. (2015c), “Dynamic agglomeration patterns in a two-country new economic geography model with four regions”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 79, pp. 2-17.
- [8] Currie, M. e Kubin, I. (2006), “Chaos in the core-periphery model”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 60, Nº 2, pp. 252-275.
- [9] Dixit, A. K. e Stiglitz, J. E. (1977), “Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity”, *The American Economic Review*, Vol. 67, Nº 3, pp. 297-308.
- [10] Forslid, R. e Ottaviano, G. I. (2003), “An analytically solvable core-periphery model”, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, Nº 3, pp. 229-240.
- [11] Fujita, M., Krugman, P. R. e Venables, A. J. (1999), *The spatial economy: cities, regions and international trade*, Cambridge: MIT Press.
- [12] Fujita, M. e Thisse, J.-F. (1996), “Economics of Agglomeration”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 10, Nº 21, pp. 339-378.
- [13] Fujita, M. e Thisse, J.-F. (2009), “New Economic Geography: An appraisal on the occasion of Paul Krugman’s 2008 Nobel Prize in Economic Sciences”, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, pp. 108-119.
- [14] Garrido-da-Silva, L. (2014), “Core-periphery model in discrete time - an analysis”, <http://ssrn.com/abstract=2402196>, acedido em 13 junho 2016.
- [15] Garrido-da-Silva, L., Castro, S. B. e Vasconcelos, P. B. (2015), “Discrete Dynamics for the Core-periphery Model”, *Spatial Economic Analysis*, Vol. 10, Nº 1, pp. 36-51.
- [16] Gaspar, J., Castro, S. B. e Correia-da-Silva, J. (2013), “The Footloose Entrepreneur Model with 3 Regions”, *Investigação – Trabalhos em curso*, Nº 496, Faculdade de Economia do Porto.

- [17] Krugman, P. (1991), “Increasing returns and economic geography”, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, N<sup>o</sup> 3, pp. 483-499.
- [18] Krugman, P. e Venables, A. J. (1995), “Globalization and the inequality of nations”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 110, N<sup>o</sup> 4, pp. 857-880.
- [19] Leite, V., Castro, S. B. e Correia-da-Silva, J. (2009), “The core periphery model with asymmetric inter-regional and intra-regional trade costs”, *Portuguese Economic Journal*, Vol. 8, N<sup>o</sup> 1, pp. 37-44.
- [20] Leite, V., Castro, S. B. e Correia-da-Silva, J. (2013), “A third sector in the core-periphery model: Non-tradable goods”, *Annals of Regional Science*, Vol. 50, N<sup>o</sup> 1, pp. 71-108.
- [21] Ottaviano, G. e Puga, D. (1998), “Agglomeration in the global economy: A survey of the 'new economic geography'”, *World Economy*, Vol. 21, N<sup>o</sup> 6, pp. 707- 731.
- [22] Ottaviano, G. e Thisse, J.-F. (2004), “Agglomeration and economic geography”, em *Cities and Geography*, J. V. Henderson e J.-F. Thisse (editores), Handbook of Regional and Urban Economics, Vol. 4, pp. 2563-2608.
- [23] Puga, D. (1998), “Urbanization patterns: European versus less developed countries”, *Journal of Regional Science*, Vol. 38, N<sup>o</sup> 2, pp. 231-252.
- [24] Puga, D. (1999), “The rise and fall of regional inequalities”, *European Economic Review*, Vol. 43, N<sup>o</sup> 2, pp. 303-334.
- [25] Sandholm, W. H. (2009), “Evolutionary Game Theory”, em *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, A. R. Meyers (editor), New York: Springer New York, pp. 3176-3205.
- [26] Tabuchi, T. (1998), “Urban Agglomeration and Dispersion: A Synthesis of Alonso and Krugman”, *Journal of Urban Economics*, Vol. 44, N<sup>o</sup> 3, pp. 333-351.



- [27] Tabuchi, T. e Thisse, J.-F. (2002), “Taste heterogeneity, labor mobility and economic geography”, *Journal of Development Economics*, Vol. 69, N<sup>o</sup> 1, pp. 155-177.
- [28] Venables, A. J. (1996), “Equilibrium locations of vertically linked industries”, *International Economic Review*, Vol. 37, N<sup>o</sup> 2, pp. 341-359.
- [29] Zhang, W.-B. (2006), *Discrete dynamical systems, bifurcations, and chaos in economics*, The Netherlands: Elsevier.